Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
18.04.2014

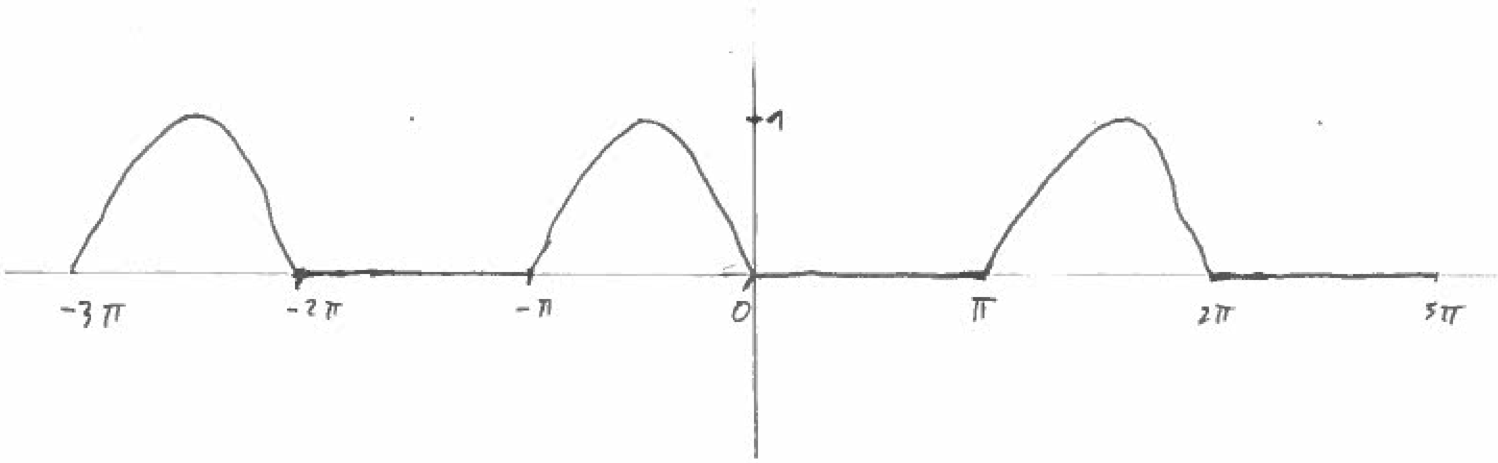
2. Übungsblatt zur „Analysis II"

Hausübungen

Aufgabe H4 (Der Sinus-Minus; 5 Punkte)
Berechnen und skizzieren Sie $\sin_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Lösung:

Es gilt $\sin(x) \leq 0 \iff x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \sin_-(x) = \begin{cases} -\sin(x) & : x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi] \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe H5 (Riemann-Integrierbarkeit I; 5 Punkte)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist Riemann-integrierbar.

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \varphi, \psi \in T_a^b)\ \varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon$.

Lösung:

„(i) ⇒ (ii)": Es gilt $\int_{*a}^{b} f = \int_{a}^{*b} f = \int_a^b f$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\, \varphi \in T_a^b : \varphi \le f \text{ und } \int_a^b f - \int_a^b \varphi < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists\, \psi \in T_a^b : f \le \psi \text{ und } \int_a^b \psi - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \psi - \varphi = \underbrace{\int_a^b \psi - f}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_a^b f - \varphi}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

„(ii) ⇒ (i)": Sei $\varepsilon > 0$.

Wir finden $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \le f \le \psi$

und $\int_a^b \psi < \varepsilon + \int_a^b \varphi$

Es gilt $\int_a^{*b} f \le \int_a^b \psi$ und $\int_a^b \varphi \le \int_{*a}^{b} f$

$$\Rightarrow \int_a^{*b} f < \varepsilon + \int_{*a}^{b} f < \varepsilon + \int_a^{*b} f$$

Da ε beliebig ~~f~~ folgt $\int_a^{*b} f = \int_{a*}^{b} f$.

$\Rightarrow f \in R_a^b$

Aufgabe H6 (Riemann-Integrierbarkeit II; 5 Punkte)

Seien $a < b$.

(a) Für $x \in [a, b]$ ist die Abbildung

$$1_{\{x\}} : [a, b[\to \mathbb{R}, \ y \mapsto \begin{cases} 1 & : y = x \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar.

(b) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ gibt, sodass $f|_{]t_j, t_{j+1}[}$ für $j = 0, \ldots, n-1$ stetig ist. Zeigen Sie, dass jede beschränkte und stückweise stetige Funktion auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist.

Lösung:

(a) Für $x \in]a,b[$ wählen wir die Zerlegung $z_0 = a$, $z_1 = x$, $z_2 = b$ und sehen, dass $1_{\{x\}}$ eine Treppenfunktion ist.

Für $x \in \{a, b\}$ ist $1_{\{x\}}$ eine Treppenfunktion mit der Zerlegung $z_0 = a$, $z_1 = b$.

(b) Wir benutzen die Notation aus der Aufgabe. Sei $|f(x)| \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Wir definieren die Abbildung

$$f_j : [a,b] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} f(x) & : x \in]t_j, t_{j+1}[\\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

für $j = 0, \ldots, n-1$. Es folgt

$$f = \sum_{j=0}^{n-1} f_j + \sum_{j=0}^{n} f(t_j) \cdot 1_{\{t_j\}}.$$

Es reicht also zu zeigen, dass für $a \le \tilde{a} < \tilde{b} \le b$ und eine stetige Abbildung $g :]\tilde{a}, \tilde{b}[\to \mathbb{R}$ mit $|g(x)| \le M \ \forall x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ die Funktion

$$\tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} g(x) & : x \in]\tilde{a}, \tilde{b}[\\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist.

Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{2}{m} M < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*) \qquad \text{und} \qquad \tilde{a} + \frac{1}{m} < \tilde{b} - \frac{1}{m}.$$

Wir schreiben $\alpha := \tilde{a} + \frac{1}{m}$ und $\beta := \tilde{b} - \frac{1}{m}$.

Da $\tilde{g}|_{[\alpha,\beta]}$ Riemann-integrierbar ist, gibt es $\varphi_1, \psi_1 \in T_\alpha^\beta$ mit $\varphi_1 \leq \tilde{g}|_{[\alpha,\beta]} \leq \psi_1$ und

$$\int_\alpha^\beta \psi - \varphi < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$$

(da $\tilde{g}|_{[\alpha,\beta]}$ stetig und #5).

Wir definieren die Treppenfunktionen

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : x \in [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b] \\ -M & : x \in]\tilde{a}, \alpha[\cup]\beta, \tilde{b}[\\ \varphi_1(x) & : x \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

und

$$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : x \in [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b] \\ M & : x \in]\tilde{a}, \alpha[\cup]\beta, \tilde{b}[\\ \psi_1(x) & : x \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Es gilt $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi - \varphi = \int_{\tilde{a}}^{\alpha} \psi - \varphi + \int_{\beta}^{\tilde{b}} \psi - \varphi + \int_\alpha^\beta \psi - \varphi$$

$$\underset{(**)}{<} 2M(\alpha - \tilde{a}) + 2M(\tilde{b} - \beta) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\underset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad . \quad \square$$