Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
02.05.2014

4. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H10 (Intergrale rationaler Funktionen II; 5 Punkte)
Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, mit $p^2 - 4q < 0$ und $k \geq 2$. Zeigen Sie

(a)

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}dx + const.$$

(b)

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}dx = -\frac{a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + (b-\frac{ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx + const.$$

Lösung:

(a) $\frac{d}{dx}$ (rechte Seite) $= \frac{2}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}}$

$$+ \frac{(2x+p)\cdot(-(k-1))\cdot(2x+p)}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^k} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}$$

$$= \frac{4k-4}{(k-1)(4q-p^2)\cdot(x^2+px+q)^{k-1}} - \frac{(2x+p)^2}{(4q-p^2)(x^2+px+q)^k}$$

$$= \frac{4(x^2+px+q)-(2x+p)^2}{(4q-p^2)\cdot(x^2+px+q)^k} = \frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$

(b) $\frac{d}{dx}$ (rechte Seite) $= \frac{a\cdot(k-1)(2x+p)}{2(k-1)(x^2+px+q)^k} + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$

$$= \frac{ax+\frac{ap}{2}+b-\frac{ap}{2}}{(x^2+px+q)^k} = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$$

Aufgabe H101 (Partialbruchzerlegung II; 5 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$$

Hinweis: Substitution mit tan oder arctan.
Lösung:

Seien $a, x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ und $\alpha := \tan(a)$, $\beta := \tan(x)$

$$\int_a^x \frac{\cos^5(t)}{\sin^3(t)} dt = \int_a^x \frac{1}{\tan^3(t)} \cdot \cos^2(t) dt$$

$$\underset{\text{Rückwärts subst. tan(a) mit arctan.}}{=} \int_{\tan(a)}^{\tan(x)} \frac{1}{t^3} \cdot \underbrace{\cos^2(\arctan(t))}_{= \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{t^3 \cdot (1+t^2)^2}$$

Der Ansatz

$$\frac{1}{t^3 \cdot (1+t^2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{Dt + E}{1+t^2} + \frac{Ft+G}{(1+t^2)^2}$$

führt auf $A = -2$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 2$, $E = 0$, $F = 1$, $G = 0$

$$\Rightarrow \int_a^x \frac{\cos^5(t)}{\sin^3(t)} dt = -\int_\alpha^\beta \frac{2}{t} dt + \int_\alpha^\beta \frac{1}{t^3} dt + \int_\alpha^\beta \frac{2t}{1+t^2} dt + \int_\alpha^\beta \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= -2 [\ln]_\alpha^\beta + \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right]_\alpha^\beta + \left[\ln(1+t^2)\right]_\alpha^\beta + \left[\frac{-1}{2(1+t^2)}\right]_\alpha^\beta$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)} dx = -2\ln(\tan(x)) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan^2(x)} + \ln(1+\tan^2(x))$$

$$- \frac{1}{2(1+\tan^2(x))}$$

Aufgabe H12 (Taylor-Formel II; 5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f:]-1,\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{1+x}$ zum Entwicklungspunkt 0 und zeigen Sie, dass die Funktion f auf $]-1,1[$ durch ihre Taylorreihe gegeben ist.

(b) Seien $n\in\mathbb{N}$ gerade, $a<b$ reelle Zahlen, $x\in]a,b[$ und $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ eine C^n-Fuktion mit

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n-1)}(x)=0 \text{ und } f^{(n)}(x)\neq 0.$$

Zeigen Sie, dass x eine Extremstelle von f ist.

Lösung:

(a) Für $x>-1$ und $n\geq 1$ gilt $f^{(n)}(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$

Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$ für alle $x\in]-1,1[$.

wobei r_n das Restglied der Taylorentwicklung um 0 ist.

Seien $x\in]0,1[$ und $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$.

Es gilt $|r_n(x)|=|x|^{n+1}\cdot\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$ für ein $\xi\in]-1,1[$.

$$\Rightarrow |r_n(x)|=|x|^{n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\left|\frac{3}{2}-k\right|}{k}\right)\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

$$=|x|^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\prod_{k=2}^{n+1}\underbrace{\frac{k-\frac{3}{2}}{k}}_{\leq 1}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

$$\leq |x|^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ Der Fall $x=0$ ist klar. Fall $x\in]-1,0[$ siehe nächste Seite.

(b) Es gilt $f(x+h)=f(x)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\tau h)$ (⊛) für ein $\tau\in[0,1]$.

OBdA. gelte $f^{(n)}(x)>0$. Sei $\varepsilon>0$ so klein, dass $f^{(n)}(x+\delta)>0$ für alle $\delta\in]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Mit ⊛ erhalten wir $f(x+\delta)-f(x)=\underbrace{\frac{\delta^n}{n!}}_{>0 \text{ da } n \text{ gerade}}\cdot\underbrace{f^{(n)}(x+\tau\delta)}_{>0}$, für ein $\tau\in[0,1]$

Weiter mit (a). Es fehlt noch der Fall $x \in]-1,0[$.

Es gilt $r_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\, dt$

$$\underset{\circledast}{=} \frac{1}{n!} \cdot x \cdot \int_0^1 (x - xr)^n \cdot f^{(n+1)}(xr)\, dr. \quad =: *_2$$

Bei $\circledast$ haben wir die Transformation $\varphi(t) = \frac{t}{x}$

$$*_2 = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-r)^n \cdot f^{(n+1)}(xr)\, dr.$$

Es gilt nun $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \left| \int_0^1 (1-r)^n \cdot \prod_{k=1}^{n+1} (\tfrac{1}{2}-k+1) \cdot (1+rx)^{\frac{1}{2}-n-1} dr \right|$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=2}^{n+1} \left(k - \tfrac{3}{2}\right) \cdot |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-r)^n}{(1+rx)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+rx}}\, dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\prod_{k=1}^{n} (k+1-\frac{3}{2})}{\prod_{k=1}^{n} k} \cdot |x| \cdot \int_0^1 \frac{(|x| - |x| r)^n}{(1 - r|x|)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+rx}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k - \frac{1}{2}}{k} \right)}_{\leq 1} \cdot |x| \cdot \frac{(|x| - |x|\xi)^n}{(1-\xi|x|)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\xi x}} \quad \text{für ein } \xi \in [0,1$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{1+\xi x}} \cdot \Big(\underbrace{\frac{|x| - |x|\xi}{1 - \xi |x|}}_{\leq 1} \Big)^n \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$