Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014

09.05.2014

5. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H13 (Ein uneigentliches Integral; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

(a) Zeigen Sie mit dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Folgern Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existiert.

Lösung: Zunächst zeigen wir ein Lemma:

Lemma. *Die Folge* $(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x} dx)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine monoton fallende Nullfolge.*

Proof. Mit der Stetigkeit des Logarithmus erhalten wir

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x} dx = \ln((n+1)\pi) - \ln(n\pi) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(\frac{n+1}{n}) \to \ln(1) = 0.$$

Es gilt zudem

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\underbrace{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}}_{<1}\right) < 0$$

□

Nun zur Aufgabe.

(a) Es gilt $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = (-1)^{n+1} \cdot \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}$. Wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}.$$

Wir wollen das Leibniz-Kriterium anwenden.
Es gilt nach obigem Lemma: $0 < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x} \to 0$. Die Folge $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}$ ist zudem monoton fallend:

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x} - \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin x - \pi|}{x-\pi}$$
$$= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \underbrace{\frac{|\sin x|}{x} - \frac{|\sin x|}{x-\pi}}_{<0} < 0.$$

Es folgt die Aussage.

(b) Sei $\beta_n \to \infty$. Wir zeigen, dass $y_n := \int_\pi^{\beta_n} \frac{\sin(x)}{x} dx$ eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\left| \int_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \sum_{n=k_1}^{k_2} a_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ und}$$
$$\int_{(k_1-1)\pi}^{k_1\pi} \frac{1}{x} dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $k_1, k_2 \geq N_1$ mit $k_1 \leq k_2$. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\beta_n \geq N_1\pi$ für alle $n \geq N$. Gegeben seien nun $n, m \geq N$ mit $n \leq m$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\beta_n}^{\beta_m} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_{\beta_n}^{k_1\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{k_2\pi}^{\beta_m} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\beta_n}^{k_1\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| + \left| \int_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| + \left| \int_{k_2\pi}^{\beta_m} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\
&\leq \int_{\beta_n}^{k_1\pi} \frac{1}{x} dx + \left| \int_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| + \int_{k_2\pi}^{\beta_m} \frac{1}{x} dx \\
&\leq \int_{(k_1-1)\pi}^{k_1\pi} \frac{1}{x} dx + \left| \int_{k_1\pi}^{k_2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| + \int_{k_2\pi}^{(k_2+1)\pi} \frac{1}{x} dx \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aufgabe H14 (Eine glatte Funktion; 5 Punkte)

Sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} p\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f eine C^k-Abbildung ist und es eine Polynomfunktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} q\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist also die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0. \end{cases}$$

eine C^∞-Abbildung.

Lösung: Wir definieren die Polynomfunkion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -p'(x) \cdot x^2 + p(x) \cdot x^2$ sowie die Abbildung

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} q\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Nach G 14 sind f und g als Linearkombination stetiger Funktionen wieder stetig. Auf $]-\infty, 0[$ ist f stetig differenzierbar mit $f'(x) = 0 = g(x)$. Auf $]0, \infty[$ gilt $f'(x) = p'(\frac{1}{x}) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + p(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = g(x)$. Nach G 15 ist f also differenzierbar mit $f' = g$. Der Rest der Aussage folgt durch Induktion, da g von der gleichen Form ist wie f.

Aufgabe H15 (Das zweiseitige uneigentliche Integral; 5 Punkte)

Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass f für alle $\alpha < \beta \in]a,b[$ über $]\alpha, \beta[$ Riemann-integrierbar ist. Man wählt ein $\theta \in]a,b[$ und definiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ als

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^\theta f(t)dt + \int_\theta^b f(t)dt,$$

wenn beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren. Zeigen Sie, dass die Existenz und der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(t)dt$ unabhängig von der Wahl von θ ist.

Lösung: Seien $\theta_2 \in]a,b[$ und $c := \int_\theta^{\theta_2} f$.

i Zunächst zeigen wir: $\int_a^{\theta_2} f$ existiert genau dann, wenn $\int_a^\theta f$ existiert.
  Sei dazu $\beta \in]a, \theta_2[$. Dann gilt $\int_\beta^{\theta_2} f = \int_\beta^\theta f + \int_\theta^{\theta_2} f = \int_{\mathcal{B}}^\theta + c$

ii Analog zeigt man, dass $\int_{\theta_2}^b f$ genau dann existiert, wenn $\int_\theta^b f$ existiert.

Wir sehen, dass die Existenz des Integrals nicht von der Wahl von θ abhängt.

Angenommen $\int_a^\theta f$ und $\int_\theta^b f$ existieren. Dann gilt

$$\int_a^\theta f + \int_\theta^b f = \int_a^{\theta_2} f + \int_{\theta_2}^\theta f + \int_\theta^{\theta_2} f + \int_{\theta_2}^b f = \int_a^{\theta_2} f + \int_{\theta_2}^b f.$$