Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
16.05.2014

6. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H16 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $f_n\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$ und $g_n\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

(a) Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ punktweise? Wenn ja, gegen welche Funktion?

(b) Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auch gleichmäßig?

(c) Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty g_n$ gleichmäßig? Wenn ja, gegen welche Funktion?

Lösung:

(a) Sei $x \in [1,\infty[$. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x \cdot \frac{1+x^2}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} + x.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge punktweise.

(b)

Siehe nächste Seite.

(c) Für $x \in [1,\infty[$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = 1 + \frac{1}{x^2}$. ⊛

Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$. Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß.

Nach ⊛ konv. $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gegen die Funktion $[1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$.

(b) Für $x \in [1, \infty[$ gilt

$$0 \le (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 1 + x^2 \ge 2x \Rightarrow \frac{1+x^2}{x} \ge 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}.$$

Für $n \ge 1$ und $x \in [1, \infty[$ gilt somit

$$\frac{|x|}{(1+x^2)^n} \le \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n \le \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \le \frac{1}{2^n}.$$

Somit erhalten wir $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. glm. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konv. glm.

Aufgabe H17 (Gleichmäßige Konvergenz I; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Seien zudem $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f_n([0,1]) \subseteq [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\varphi \circ f$ konvergiert.

Hinweis: φ ist gleichmäßig stetig.

Lösung:

(a) Zunächst zeigen wir $f([0,1]) \subseteq [a,b]$.

Ang. $x \in [0,1]$ mit $f(x) \notin [a,b]$. OBdA sei $f(x) > b$.

Sei $\varepsilon := \frac{f(x)-b}{2}$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{>0} < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) - f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow f(x) - b < \varepsilon = \frac{b-f(x)}{2}$ ↯ da $b - f(x) > 0$

Nun zeigen wir $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ glm. Sei $\varepsilon > 0$.

Da φ glm. stetig, finden wir $\delta > 0$ mit

$\forall y_1, y_2 \in [a,b],\ |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$.

Da $f_n \to f$ glm. $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ \|f - f_n\|_\infty < \delta$

Sei $x \in [0,1]$. Es gilt $|f_n(x) - f(x)| < \delta$.

$\Rightarrow |\varphi \circ f(x) - \varphi \circ f_n(x)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f_n(x))| < \varepsilon$.

Aufgabe H18 (Gleichmäßige Konvergenz II; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Zudem sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ die gegen ein $t \in [0,1]$ konvergiert. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n(t_n) = f(t)$.

Lösung:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wissen, dass f stetig ist.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$. Also gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$

mit $|f(t) - f(t_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$.

Es gibt $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N_2$.

Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Für $n \geq N$ gilt

$$|f(t) - f_n(t_n)| = |f(t) - f(t_n) + f(t_n) - f_n(t_n)|$$

$$\leq |f(t) - f(t_n)| + |f(t_n) - f_n(t_n)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$