Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
23.05.2014

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H19 (Abschluss, Inneres, Rand; 5 Punkte)
Seien A und B Teilmengen eines metrischen Raumes X. Zeigen Sie

$$\text{(a) } \overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B} \qquad \text{(b) } (A\cap B)^\circ = \mathring{A}\cap\mathring{B} \qquad \text{(c) } X\setminus\overline{A} = (X\setminus A)^\circ$$

$$\text{(d) } \partial(A\cup B)\subseteq \partial A\cup\partial B.$$

Finden Sie zudem ein Beispiel für das $\partial(A\cup B)\subsetneq\partial A\cup\partial B$ gilt.

Lösung:

(a) $\overline{A}\cup\overline{B}$ ist abg. und enthält $A\cup B$. Also gilt
$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$.

Sei nun $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. OBdA sei $x\in\overline{A}$.
Sei $U\subseteq X$ eine x-Umg. Dann gilt $U\cap A\neq\emptyset$
$\Rightarrow U\cap(A\cup B)\neq 0 \underset{\text{Übel.}}{\Rightarrow} x\in\overline{A\cup B}$

(b) $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ ist eine offene Menge und enthalten in
$A\cap B$. Also gilt $\mathring{A}\cap\mathring{B}\subseteq(A\cap B)^\circ$.
Sei nun $x\in(A\cap B)^\circ$. Dann gibt es x-Umg.
$U\subseteq X$ mit $U\subseteq A\cap B$.
Also $U\subseteq A$. $\Rightarrow x\in\mathring{A}$.
Analog erhält man $x\in\mathring{B}$.

(c) Es gilt $\overline{A} \supseteq A$.

$\Rightarrow X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$. Da $X \setminus \overline{A}$ offen ist folgt $X \setminus \overline{A} \subseteq (X \setminus A)^\circ$.

Sei nun $x \in (X \setminus A)^\circ$. Dann gibt es eine x-Umg $U \subseteq X$ mit $\cancel{M} \subseteq X \setminus A$. Also $U \cap A = \emptyset$

Ang. $x \in \overline{A}$. Dann müsste jede x-Umg. A schneiden. Widerspruch zu $U \cap A = \emptyset$.

Also $x \in X \setminus \overline{A}$.

(d) Sei $x \in \partial(A \cup B)$. $\Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ$

$= (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)^\circ$

1 Fall. $x \in \overline{A}$. Da $A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, folgt

~~...~~ $x \notin \mathring{A} \Rightarrow x \in \partial A$.

2. Fall $x \in \overline{B}$ analog.

(e) Seien $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$.

Es gilt $\partial A = \{-1, 0\}$, $\partial B = \{0, 1\}$, $\cancel{\partial A \cup B}$

$\partial A \cup B = \{-1, 1\}$.

Also gilt $\partial A \cup B \subsetneq \partial A \cup \partial B$.

Aufgabe H20 (Norm auf dem Produkt; 5 Punkte)
Seien $(E, \|\bullet\|_E)$ und $(F, \|\bullet\|_F)$ normierte Räume. Für $x \in E$ und $y \in F$ definieren wir

$$\|(x,y)\| := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\bullet\|$ eine Norm auf $E \times F$ ist.

Lösung:

(i) Sei $(x,y) \in E \times F$ mit $\max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} = 0$

$\Rightarrow \|x\|_E = \|x\|_F = 0 \Rightarrow (x,y) = 0.$

Offensichtlich gilt $\|(0,0)\| = 0.$

(ii) Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$

$$\|(x_1+x_2, y_1+y_2)\| = \max\{\|x_1+x_2\|_E, \|y_1+y_2\|_F\}$$

$$\underset{\circledast}{\leq} \max\{\|x_1\|_E, \|y_1\|_F\} + \max\{\|x_2\|_E, \|y_2\|_F\}$$

$$= \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$$

Für $\circledast$: OE: $\|x_1+x_2\|_E \geq \|y_1+y_2\|_F$.

Dann gilt $\|x_1+x_2\|_E \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E$

$$\leq \max\{\|x_1\|_E, \|y_1\|_F\} + \max\{\|x_2\|_E, \|y_2\|_F\}.$$

(iii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(x,y) \in E \times F$.

$$\|(\lambda x, \lambda y)\| = \max\{\|\lambda x\|_E, \|\lambda y\|_F\}$$

$$= \max\{|\lambda| \cdot \|x\|_E, |\lambda| \|y\|_F\} = |\lambda| \|(x,y)\|$$

Aufgabe H21 (Die Cantor-Menge; 5 Punkte)
Seien $C_0 := [0,1]$, $C_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1] = \frac{1}{3}C_0 \cup (\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_0)$ und rekursiv

$$C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n\right).$$

Die Menge C_n besteht also aus 2^n disjunkten Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$. Man nennt $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ die Cantor-Menge.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}$ definieren wir die Intervalle

$$I_{(0,a_1,\dots,a_n)} := \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}, \frac{1}{3^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}\right].$$

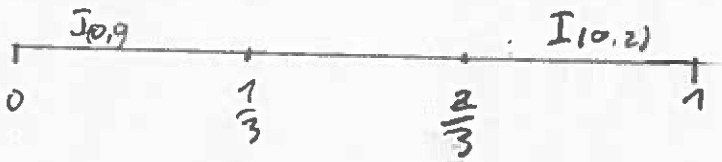
(a) Zeichnen Sie $I_{0,0}$ und $I_{0,2}$ sowie $I_{0,0,0}$, $I_{0,0,2}$, $I_{0,2,0}$ und $I_{0,2,2}$.
(b) Zeigen Sie $I_{0,a_1,\dots,a_n} \supseteq I_{0,a_1,\dots,a_{n+1}}$ für alle $a_1,\dots a_{n+1} \in \{0,2\}$.
(c) Zeigen Sie

$$C_n = \bigcup_{a_1,\dots,a_n\in\{0,2\}} I_{(0,a_1,\dots,a_n)}$$

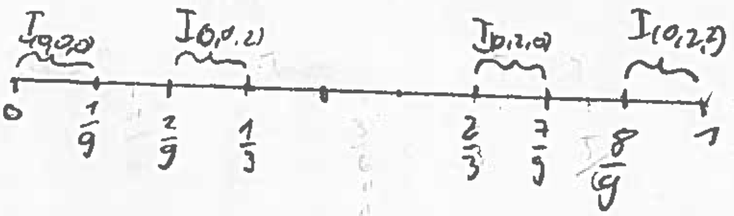
für $n \in \mathbb{N}$.
(d) Folgern Sie $C = \{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0,2\}\}$.

Lösung:

(a)



$I_{(0,0)} = [0,\frac{1}{3}]$,
$I_{(0,2)} = [\frac{2}{3}, 1]$



$I_{(0,0,0)} = [0,\frac{1}{9}]$
$I_{(0,0,2)} = [\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$
$I_{(0,2,0)} = [\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$
$I_{(0,2,2)} = [\frac{8}{9},1]$

(b) Es gilt

$$I_{(0,a_1,\dots,a_n,0)} = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}, \frac{1}{3^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}\right] \subseteq I_{(0,a_1,\dots,a_n)}.$$

und

$$I_{(0,a_1,\dots,a_n,2)} = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}+\frac{2}{3^{n+1}}, \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}}_{=\frac{1}{3^n}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^n}\right]$$

$$\subseteq I_{(0,a_1,\dots,a_n)}$$

(c) Wir machen eine Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Der Induktionsanfang ist klar.

Die Aussage gelte für festes $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt also $C_n = \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}} I(0,a_1,\dots,a_n)$

Wir rechnen

$$\frac{1}{3} \cdot I(0,a_1,\dots,a_n) = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{k+1}}, \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^{k+1}}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{3^k}, \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{3^k}\right] = I(0,0,a_1,\dots,a_n)$$

und

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot I(0,a_1,\dots,a_n) = \left[\frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{3^k}, \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{3^k}\right]$$

$$= I(0,2,a_1,\dots,a_n).$$

Nun folgt mit I.V.:

$$C_{n+1} = \frac{1}{3} C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n\right)$$

$$= \left(\bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}} \frac{1}{3} I(0,a_1,\dots,a_n)\right) \cup \left(\bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} I(0,a_1,\dots,a_n)\right)$$

$$= \left(\bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}} I(0,0,a_1,\dots,a_n)\right) \cup \left(\bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}} I(0,2,a_1,\dots,a_n)\right)$$

$$= \bigcup_{a_1,\dots,a_{n+1} \in \{0,2\}} I(0,a_1,\dots,a_{n+1}) \quad \square$$

(d) Wir zeigen zunächst ein Lemma.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0,2\}$, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in I_{(0,a_1,\dots,a_N)}$ für alle $N\in\mathbb{N}$.

Bew: Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{3^n}$ reicht es $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^N}$ zu zeigen.

Dazu: $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$= 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} = \frac{1}{3^N}$ □.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0,2\}$.

Wir zeigen $x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$

Sei dazu $N\in\mathbb{N}$. Wir müssen $x\in C_N$ zeigen. Dies ist erfüllt, da

$$x \underset{\text{Lemma}}{\in} I_{(0,a_1,\dots,a_N)} \underset{(c)}{\subseteq} C_N$$

Sei nun $x\in C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Wegen (c) finden wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x\in I_{(0,a_1,\dots,a_n)}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es gilt $x, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \in I_{(0,a_1,\dots,a_n)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Aber für $a,b\in I_{(0,a_1,\dots,a_n)}$ gilt $|a-b|\leq\frac{1}{3^n}$

$\Rightarrow \left|x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^N}$ $\forall N\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ □