Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
30.05.2014

8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H22 (Stetige Fortsetzung II; 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $h\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt, d.h. finden Sie eine stetige Funktion $\hat{h}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\hat{h}(x) = h(x)$ für alle $x \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $f\colon (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$ zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt.

Lösung:

(a) Sei

$$\hat{h}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}: & x \neq 0 \\ 0: & x = 0. \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass $\hat{h}$ stetig ist reicht es die Stetigkeit in 0 zu zeigen. Es gilt $\lim_{x\nearrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \cos(x) = 1$. Analoges für den rechten Grenzwert zeigt die Aussage.

(b) Wir betrachten die Abbildung $\hat{f}(x, y) := yh(xy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dies ist eine stetige Abbildung auf $\mathbb{R}^2$. Es gilt $\hat{f}(x, y) = f(x, y)$ für $x \neq 0$.

Aufgabe H23 (Produkttopologie; 5 Punkte)

Seien $(E, \|\bullet\|_E)$ und $(F, \|\bullet\|_F)$ normierte Räume. In H 20 haben wir gesehen, dass

$$E \times F \to [0, \infty[,\ (x, y) \mapsto \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$$

eine Norm auf $E \times F$ ist. Zeigen sie, dass $E \times F$ ausgestattet mit dieser Norm die Produkttopologie trägt.

Lösung: Sei $\mathcal{O}$ die Topologie die von der Norm kommt, $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf $E \times F$.

Sei $W \in \mathcal{T}$ und $(x, y) \in W$. Sei $U \times V$ ein offenes Kästchen in $E \times F$ bezüglich $\mathcal{T}$ mit $(x, y) \in U \times V \subseteq W$. Wir finden $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^E(x) \times B_\varepsilon^F(y) \subseteq U \times V$. Also $B_\varepsilon^{E\times F}(x, y) = B_\varepsilon^E(x) \times B_\varepsilon^F(y) \subseteq U \times V$.

Sei nun $W \in \mathcal{O}$ und $(x, y) \in W$. Wir finden $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon^E(x) \times B_\varepsilon^F(y) = B_\varepsilon^{E\times F}(x, y) \subseteq W$. $B_\varepsilon^E(x) \times B_\varepsilon^F(y)$ ist ein offenes Kästchen in $\mathcal{T}$.

Aufgabe H24 (Dichtheit; 5 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $M \subseteq X$ genau dann dicht in X ist, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ für jede offene, nicht-leere Teilmenge $V \subseteq X$.

Lösung: "$\Leftarrow$:"Sei M dicht in X und $V \subseteq X$ offen und $x_0 \in V$. Es gilt $x \in X = \overline{M}$ und V ist eine x_0-Umgebung. Also schneidet V die Menge M.

"$\Rightarrow$:" Sei $x_0 \in X$ und V eine x_0-Umgebung. O.B.d.A. sei V offen. Dann schneidet V die Menge M. Also gilt $x_0 \in \overline{M}$.