Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
06.06.2014

9. Übungsblatt zur „Analysis II"

Hausübungen

Aufgabe H25 (Die Operatornorm; 5 Punkte)

(a) Seien $(E, \|\bullet\|_E)$ und $(F, \|\bullet\|_F)$ normierte Räume. Für eine lineare Abbildung haben wir die Operatornorm

$$\|A\|_{op} := \sup\{\|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, \infty]$$

definiert. Sei $\mathcal{L}(E,F)$ der Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von E nach F. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(E,F), \|\bullet\|_{op})$ ein normierter Raum ist.

(b) Seien X, Y und Z normierte Räume sowie $B: X \to Y$ und $A: Y \to Z$ stetig lineare Abbildungen. Zeigen Sie

$$\|A \circ B\|_{op} \leq \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}$$

Lösung:

(a) Subadditivität: $\|A+B\|_{op} = \sup\{\|Ax+Bx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$

$\leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$.

Definitheit: sei $A \neq 0$. Dann gibt es $x \in E \setminus \{0\}$ mit $Ax \neq 0$.
sei OBdA $\|x\|_E = 1$.

$\Rightarrow \|A\|_{op} \geq \|Ax\|_F > 0$.

Homogenität: sei $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$\|tA\|_{op} = \sup\{\underbrace{\|tAx\|_F}_{=|t|\,\|Ax\|_F} : x \in \overline{B}_1^E(0)\} = |t| \cdot \|A\|_{op}$.

(b) sei $x \in X$ mit $\|x\| \leq 1$.

$\Rightarrow \|A \circ Bx\|_Z \leq \|A\|_{op} \cdot \|Bx\|_Y \leq \|A\|_{op} \|B\|_{op} \|x\|_X$.

$\Rightarrow \|A \circ B\|_{op} \leq \|A\|_{op} \|B\|_{op}$.

Aufgabe H26 (Stetig bilineare Abbildungen; 5 Punkte)

Seien E_1, E_2 und F normierte Räume und $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\|\beta\|_{op} := \sup\{\|\beta(x,y)\|_F : (x,y) \in E_1 \times E_2 \text{ mit } \|x\|_{E_1}, \|y\|_{E_2} \le 1\} \in [0,\infty]$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) β ist stetig.
(b) β ist stetig in $(0,0)$.
(c) $\|\beta\|_{op} < \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie für (c)⇒(a) die Ungleichung $\|\beta(x,y)\| \le \|\beta\|_{op}\|x\|\|y\|$.

Lösung:

(a) ⇒ (b) klar.

(b) ⇒ (c) β ist bilin. $\Rightarrow \beta(0,0) = 0$.

β ist stet. $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit

$$\beta(\overline{B}_\varepsilon^{E_1}(0) \times \overline{B}_\varepsilon^{E_2}(0)) \subseteq B_1^F(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2}\beta(\overline{B}_\varepsilon^{E_1}(0) \times \overline{B}_\varepsilon^{E_2}(0)) \subseteq B_{1/\varepsilon^2}^F(0)$$

$$\Rightarrow \beta(\overline{B}_1(0) \times \overline{B}_1^{E_2}(0)) \subseteq B_{1/\varepsilon^2}^F(0)$$

$$\Rightarrow \|\beta\|_{op} \le \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

(c) ⇒ (a) Seien $(x,y) \in E_1 \times E_2$. Wir zeigen $\|\beta(x,y)\| \le \|\beta\|_{op}\|x\|\|y\|$. OBdA seien $x, y \neq 0$.

Es gilt $\left\|\beta\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \le \|\beta\|_{op}$.

Es folgt die Aussage.

Sei nun $(x,y) \in E_1 \times E_2$ und $\varepsilon > 0$.

Es folgt für $\tilde{x} \in B_\varepsilon(x)$ und $\tilde{y} \in B_\varepsilon(y)$

$$\|\beta(x,y) - \beta(\tilde{x},\tilde{y})\|_F$$

$$= \|\beta(x, y-\tilde{y}) + \beta(x-\tilde{x}, \tilde{y})\|$$

$$\le \|\beta\|_{op} \left(\|x\| \cdot \|y-\tilde{y}\| + \|x-\tilde{x}\| \, \|\underbrace{\tilde{y}}_{=\tilde{y}-y+y}\| \right)$$

$$\le \|\beta\|_{op} \cdot \left(\|x\| \cdot \|y-\tilde{y}\| + \|x-\tilde{x}\| \cdot \|\tilde{y}-y\| + \|x-\tilde{x}\| \cdot \|y\| \right)$$

$$\le \|\beta\|_{op} \cdot \|x\| \cdot \varepsilon + \|\beta\|_{op} \varepsilon^2 + \|\beta\|_{op} \|y\| \cdot \varepsilon . \quad \square$$

Aufgabe H27 (Vollständigkeit; 5 Punkte)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Ist $M \subseteq X$ eine Menge so definieren wir

$$\operatorname{diam}(M) := \sup \{d(x, y) : x, y \in M\} \in [0, \infty].$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq X$ eine nicht leere abgeschlossene Menge, sodass $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. Zeigen Sie:

(a) $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow x = y$.
(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n \in A_n$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.
(c) Schließen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt, sodass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x\}$.

Lösung:

(a) Angenommen $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $x \neq y$.
$\Rightarrow d(x,y) > 0$.
$\Rightarrow \operatorname{diam}(A_n) \geq d(x,y)$, da $x, y \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) \geq d(x,y) > 0$ $\lightning$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass $\operatorname{diam}(A_n) \leq \varepsilon$ für $n \geq N$.

Seien nun $n, k \geq N$. Dann $x_n, x_k \in A_N$.
$\Rightarrow d(x_n, x_k) \leq \varepsilon$.

(c) Da X vollst. ist gibt es $x \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Wir zeigen $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$.
Für $k \geq n$ gilt $x_k \in A_n$. Da A_n abg.
$\Rightarrow x = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\geq n}} x_k \in A_n$. $\Rightarrow x \in A_n$.
Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war folgt $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$