Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
13.06.2014

10. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H28 (Die Abstandsfunktion; 5 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir definieren die Abbildung

$$d_A\colon X \to [0, \infty[, \ x \mapsto \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

(a) Zeigen Sie, dass d_A Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.
(b) Sei nun A abgeschlossen. Zeigen Sie $A = \{x \in X : d_A(x) = 0\}$.

Lösung:

(a) seien $x, y \in X$ und oBdA $d_A(y) > d_A(x)$.
Für $a \in A$ gilt
$d_A(y) \leq d(a, y) \leq d(x, y) + d(x, a)$
$\Rightarrow d_A(y) \leq d(x, y) + d(a, x)$.
Da $a \in A$ bel. folgt
$d_A(y) \leq d(x, y) + d_A(x)$
$\Rightarrow d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$.

(b) Es ist klar: $A \subseteq \{x \in X : d_A(x) = 0\}$
Sei $x \in X$ mit $d_A(x) = 0$. Es gibt also eine Folge
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ und $d(x, a_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x$. Da A abg. $\Rightarrow x \in A$.

Aufgabe H29 (Kompaktheit und Vollständigkeit; 5 Punkte)
Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass K vollständig ist.
Lösung:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K.
Da K kp., gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Sei nun $\varepsilon > 0$.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Zudem finden wir ein $M \in \mathbb{N}$ mit $n_M \geq N$ und $d(x, x_{n_M}) \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow (\forall n \geq N)\ d(x, x_n) \leq d(x_n, x_{n_M}) + d(x_{n_M}, x)$
$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Aufgabe H30 (Distanz einer abgeschlossenen Menge; 5 Punkte)

Sei $\|\bullet\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\|x-y\| : y \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt.

Lösung:

Wir betrachten die stetige Funktion

$f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty[,\ y \mapsto \|x-y\|$

Sei $y_0 \in A$. Es gibt $r>0$ mit $\overline{B}_r(x) \ni y_0$

Die Menge $A \cap \overline{B}_r(x)$ ist abgeschlossen und beschränkt. Da f stetig ist existiert

$\min\{\|x-y\| : y \in A \cap \overline{B}_r(x)\} =: (*)$

Sei $\bar{y} \in A \cap \overline{B}_r(x)$ mit $\|x-\bar{y}\| = (*)$

Dann $\|x-\bar{y}\| \in \{\|x-y\| : y \in A\}$ und

ist $y \in A$ dann gilt

$\|x-\bar{y}\| \leq \|x-y\|$. $\square$