Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
20.06.2014

11. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H31 (Stetigkeit parameter-abhängiger Integrale; 5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \int_0^1 e^{\alpha x^2} dx$ stetig ist.
Lösung:

Die Abbildung

$\mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $(\alpha, x) \mapsto e^{\alpha x^2}$

ist als Komposition stetiger Funktionen stetig.
Nach dem Satz über die Stetigkeit von parameter-abhängigen Integralen
ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \int_0^1 e^{\alpha x^2} dx$ stetig.

Aufgabe H32 (Die logarithmische Spirale; 5 Punkte)

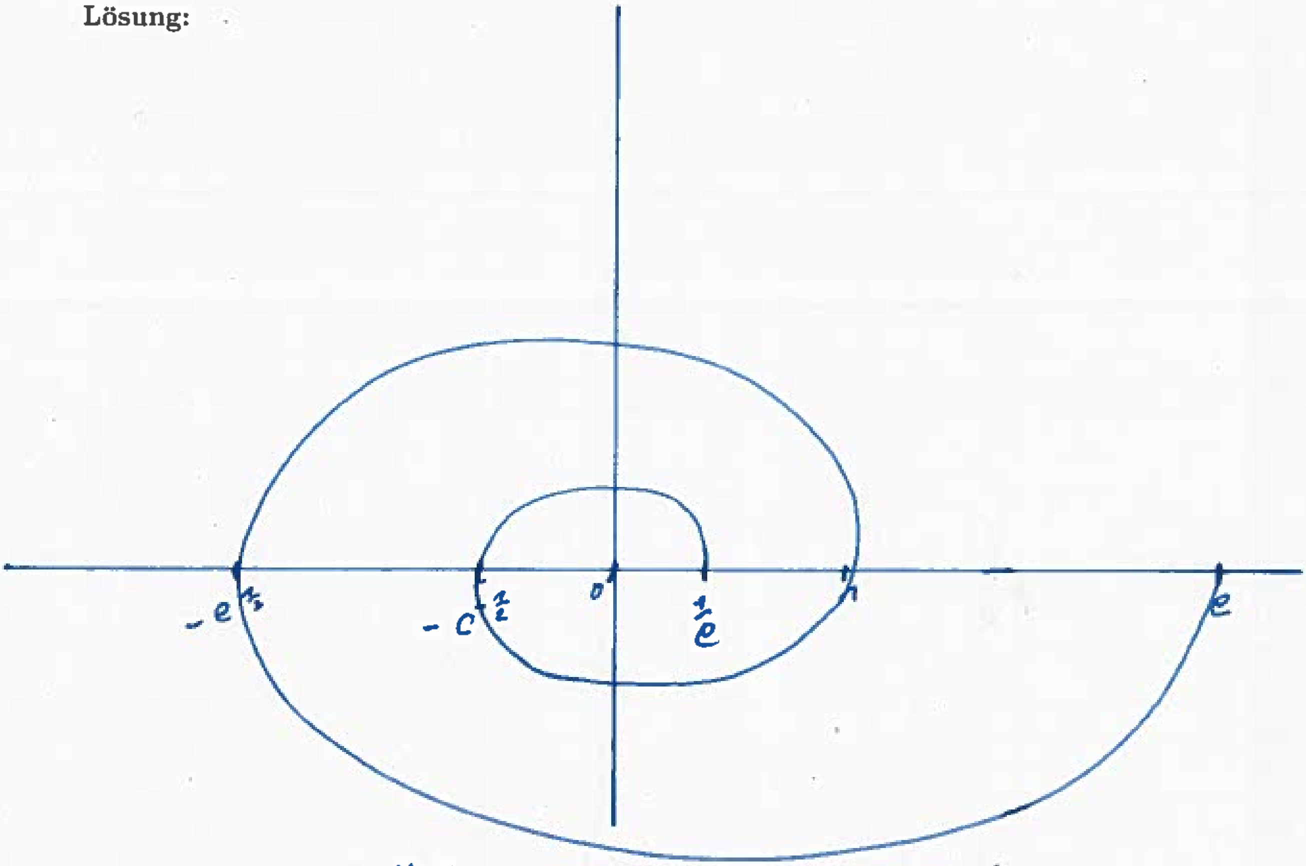
Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t))$.

(a) Skizzieren Sie γ für $c = \frac{1}{2\pi}$ und $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) Für $a < b$ definieren wir $L_{a,b} := L(\gamma|_{[a,b]})$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

(c) Existiert der Grenzwert $\lim_{a \to -\infty} L_{a,0}$? Beweisen Sie ihre Antwort!

Lösung:



(b) Es gilt $\gamma'(t) = e^{ct}\,(c\cdot\cos(t) - \sin(t),\ c\cdot\sin(t))$

Also $\|\gamma'(t)\| = e^{ct}\cdot\sqrt{c^2\cos^2(t) + \sin^2(t) + c^2\sin^2(t) + \cos^2(t)}$

$= e^{ct}\cdot\sqrt{1+c^2}$.

Also $L_{a,b} = \sqrt{1+c^2}\int_a^b e^{ct}\,dt = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\cdot(e^{cb} - e^{ca})$.

$L_{a,0} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\cdot(1 - e^{ca})$

Der GW ex. genau dann, wenn $c < 0$.

Aufgabe H33 (Ein Kurvenintegral längs einer Ellipse; 5 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y$. Berechnen Sie $\int_\gamma f$, wobei γ eine Parametrisierung der Ellipse

$$E = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

ist.

Hinweis: Finden Sie zunächst eine solche Parametrisierung.

Lösung:

Wir definieren $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (2\cos(t), 3\sin(t))$.

Dann gilt $\gamma([0,2\pi]) = E$.

Zudem gilt $\gamma'(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t))$
und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}$
$= \sqrt{4 + 5\cos^2(t)}$.

Also $\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{4+5\cos^2(t)}\,\sin(t)\,dt$

$\underset{\uparrow}{=} -\frac{3}{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \sqrt{4+u^2}\,du = 0$

$u := \sqrt{5}\cos(t)$, $du = -\sqrt{5}\sin(t)\cdot dt$.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass das Kurvenintegral unabhängig von der Parametrisierung der Ellipse ist.