Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
27.06.2014

12. Übungsblatt zur „Analysis II"

Hausübungen

Aufgabe H34 (Partielle Ableitungen; 5 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto \big(5x + 3y, 4x^2 + y^2\big)$

(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x^2+y^2)^5$

Lösung:

(a) $D_1 f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad D_2 f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$

(b) $D_1 g(x,y) = (5, 8x), \quad D_2 g(x,y) = (3, 2y)$

(c) $D_1 h(x,y) = 10(x^2+y^2)^4 x$

$D_2 h(x,y) = 10(x^2+y^2)^4 y$

Aufgabe H35 (Differenzieren unter dem Integralzeichen; 5 Punkte)
Wir definieren die Abbildungen

$$g\colon \mathbb{R}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ (t,\theta)\mapsto e^{t\cos\theta}\cos(t\sin(\theta)),$$
$$h\colon \mathbb{R}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ (t,\theta)\mapsto e^{t\cos\theta}\sin(t\sin(\theta))\text{ und}$$
$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto\int_0^{2\pi} g(t,\theta)d\theta.$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,\theta)=\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}h(t,\theta)$$

für $t>0$ und $\theta\in[0,2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie $f'(t)$ für $t>0$.

(c) Bestimmen Sie

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)}\cos(\sin(\theta))d\theta.$$

Lösung:

(a) Es gilt $\frac{\partial}{\partial t}g(t,\theta)=\cos\theta\cdot e^{t\cos\theta}\cos(t\sin\theta)$
$-e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\sin\theta,$

$\frac{\partial}{\partial\theta}h(t,\theta)=-t\sin\theta e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)+e^{t\cos\theta}$
$\cos(t\sin\theta)t\cos\theta=t\frac{\partial}{\partial t}g(t,\theta)$

(b) Es gilt $f'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}g(t,\theta)d\theta=\frac{1}{t}\cdot\int_0\frac{\partial}{\partial\theta}h(t,\theta)d\theta$
$=\left[\frac{1}{t}e^{t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\right]_0^{2\pi}=0$

(c) f ist konstant auf $]0,\infty[$ und stetig auf $\mathbb{R}$,
$\Rightarrow\int_0^{2\pi}e^{\cos(\theta)}\cos(\sin\theta)d\theta=f(0)=2\pi.$

Aufgabe H36 (Differenzieren unter dem Integralzeichen für uneigentliche Integrale; 5 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung, sodass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt$ für alle $x \in I$ existiert und es eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ gibt mit

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| < \gamma(t)$$

für alle $x \in I$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt$ stetig partiell differenzierbar ist und

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

gilt.

Lösung:

Es reicht aus zu zeigen, dass $F: I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^\infty f(x,t)dt$ eine C^1-Fkt. ist und $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty f(x,t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$ gilt.

Sei $b_n \to \infty$ mit $b_n \geq 0$. Wir definieren $F_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^{b_n} f(x,t)\,dt$. Die Funktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. punktweise gegen F.

Es gilt $F_n'(x) = \int_0^{b_n} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$.

Können wir zeigen, dass $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ glm gegen die Fkt. $G: I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$ konvergiert, so folgt, dass F C^1 ist und $F'(x) = G(x)$.

Es gilt nun $\left\| \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)\,dt - \int_0^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)dt \right\|_\infty$
$\leq \int_{b_n}^\infty \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_\infty dt \leq \int_{b_n}^\infty \gamma(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ □