Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
04.07.2014

13. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Lokale Extrema; 5 Punkte)
Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 4x^2 + 3xy + \frac{3y^2}{2}.$$

Lösung:

Es gilt $\nabla f(x,y) = (8x+3y, 3x+3y) = (0,0)$

$\Leftrightarrow 8x+3y = 0 = x+y \Leftrightarrow x = y = 0.$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f(x,y) = \frac{5x^2}{2} + \frac{3}{2}\cdot(x+y)^2 > 0 \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

$\Rightarrow (0,0)$ ist striktes lokales Minimum.

Aufgabe H2 (Produkt- und Kettelregel; 5 Punkte)

Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix und $\langle \bullet, \bullet \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\langle x, Ax \rangle}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

Lösung:

Wir setzen $g(x,y) = \langle x, Ay \rangle$ und $h(x) = (x,x)$.
Es gilt $f = \exp \circ g \circ h$ und mit der Kettenregel
folgt $df(x) = \exp((g \circ h(x)) \cdot dg(h(x)) \cdot dh(x)$.
Mit der Produktregel und der Symmetrie von A
folgt $dg(x,x)(u,u) = \langle u, Ax \rangle + \langle x, Au \rangle = 2\langle x, Au \rangle$.
Es gilt $dh(x)u = (u,u)$.
$\Rightarrow df(x)(u) = e^{\langle x, Ax \rangle} \cdot 2\langle x, Au \rangle$.

Aufgabe H3 (Laplace Operator; 5 Punkte)

Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar definieren wir

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Sei nun auch $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + g\Delta f.$$

Lösung:

$$\Delta(fg) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(fg) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} g + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}$$

$$= (\Delta f) g + 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} + f(\Delta g)$$

$$= (\Delta f) g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f(\Delta g).$$