Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
24.4.2017

1. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 1 Wir definieren das folgende System von Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\mathcal{O} := \{]a, \infty[\colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, die sogenannte *Scott-Topologie*.

(b) Es sei X ein topologischer Raum und $f \colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. f heißt *nach unten halbstetig* bzw. *unterhalbstetig* im Punkt $x_0 \in X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 existiert, sodass $f(y) > f(x_0) - \varepsilon$ für alle $y \in U$ gilt. f heißt nach unten halbstetig, wenn f in allen Punkten von X nach unten halbstetig ist. Zeigen Sie, dass f genau dann nach unten halbstetig ist, wenn $f \colon X \to (\mathbb{R}, \mathcal{O})$ stetig ist.

Aufgabe G 2 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ und $\mathcal{O}_Y$ die von X auf Y induzierte Topologie. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie auf X, so ist $\mathcal{B}_Y := \{U \cap Y \colon U \in B\}$ eine Basis für $\mathcal{O}_Y$.

(b) Ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis für die Topologie auf X, so ist $\mathcal{S}_Y := \{U \cap Y \colon U \in \mathcal{S}\}$ eine Subbasis für $\mathcal{O}_Y$.

Aufgabe G 3 Wir betrachten die Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und definieren *Umgebungen von* ∞ per $U_r(\infty) :=]r, \infty]$ für $r \in \mathbb{R}$. Nun definieren wir

$$\mathcal{O} := \mathcal{T} \cup \{T \cup U_r(\infty) \colon r \in \mathbb{R}, T \in \mathcal{T}\},$$

wobei $\mathcal{T}$ die Menge de bezüglich der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}$ offenen Mengen bezeichnet.

(a) Vergewissern Sie sich, dass $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f \colon [0,1] \to [0, \infty], \quad f(x) := \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{für } x \in [0,1[\\ \infty & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist, falls $[0,1]$ mit der von $\mathcal{T}$ und $[0,\infty]$ mit der von $\mathcal{O}$ induzierten Topologie ausgestattet wird.
Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass $\{]-\infty, a[,]a, \infty] \colon a \in \mathbb{R}\}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}$ ist.

Hausübungen

Aufgabe H 1 Es seien topologische Räume X_1 und X_2 sowie Teilmengen $Y_1 \subseteq X_1$ und $Y_2 \subseteq X_1$ gegeben. Wir definieren zwei Topologien auf dem Produkt $Y_1 \times Y_2$: Zunächst statten wir Y_1 bzw. Y_2 mit der von X_1 bzw. X_2 induzierten Topologie aus. $\mathcal{O}_1$ bezeichne dann die Produkttopologie auf $Y_1 \times Y_2$. Andererseits kann man $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie ausstatten und auf $Y_1 \times Y_2 \subseteq X_1 \times X_2$ die induzierte Topologie betrachten. Diese bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_2$. Zeigen Sie, dass beide Topologien übereinstimmen.

Aufgabe H 2 Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Weiter sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Teilmengen von X, die entweder x_0 nicht enthalten oder eine Umgebung von x_0 sind. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X.

(b) Eine Abbildung $f\colon X \to Z$ in einen topologischen Raum Z ist genau dann bezüglich $\mathcal{T}$ stetig, wenn f bezüglich $\mathcal{O}$ in x_0 stetig ist.

(c) Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie eines topologischen Raumes Z. Dann ist eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}) \to Z$ genau dann in x_0 stetig, wenn für alle diejenigen $S \in \mathcal{S}$ welche $f(x_0)$ enthalten $f^{-1}(S)$ eine Umgebung von x_0 (bzgl. $\mathcal{O}$) ist.
Hinweis: Benutzen Sie (b) und einen geeigneten Satz aus der Vorlesung.