Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
8.5.2017

3. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 4 Es sei X ein hausdorff'scher topologischer Raum derart, dass jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung hat. Zeigen Sie, dass X dann lokal kompakt ist.

Aufgabe G 5 Zeigen Sie:

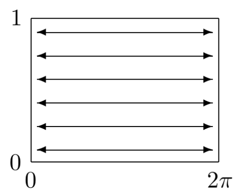
(a) Der Graph $\Gamma(f)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1,1], \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$ versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie, ist nicht zusammenhängend.

(b) Nimmt man zu $\Gamma(f)$ aus (a) einen beliebigen Punkt aus der Menge $\{0\} \times [-1,1]$ hinzu, so ist die neue Menge zusammenhängend.

Aufgabe G 6 Stellen Sie fest, ob der Raum in Aufgabe G5(b) wegzusammenhängend ist.

Hausübungen

Aufgabe H 6 Auf dem Rechteck $[0,2\pi] \times [0,1]$ definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch “Identifizieren der linken mit der rechten Seite”:



D.h. für alle $t \in [0,1]$ gelte $(0,t) \sim (2\pi,t)$. Wir betrachten den Raum ${}^{[0,2\pi]\times[0,1]}/_{\sim}$ mit der Quotiententopologie. Finden Sie eine Abbildung $f\colon [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{S}_1 \times [0,1]$, die zu einem Homöomorphismus

$$\overline{f}\colon {}^{[0,2\pi]\times[0,1]}/_{\sim} \to \mathbb{S}_1 \times [0,1]$$

faktorisiert. Folgern Sie, dass ${}^{[0,2\pi]\times[0,1]}/_{\sim}$ hausdorff'sch ist.

Aufgabe H 7 Gegeben sei die Menge

$$M := \mathbb{R}\cdot(1,0) \cup \mathbb{R}\cdot(0,1) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\left(t, \tfrac{1}{n}\right) : t \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Untersuchen Sie M auf Wegzusammenhang und lokalen Wegzusammenhang.
Hinweis: Skizzieren Sie die Menge.