Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
22.5.2017

# 5. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G 10** Gegeben einen punktierten topologischen Raum $(X, x)$ sei $F(X, x) := C(x) \subseteq X$ die Zusammenhangskomponente von $x$. Für einen Morphismus $f\colon (X, x) \to (Y, y)$ punktierter topologischer Räume (also eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f(x) = y$) sei $F(f)$ die Abbildung $f|_{C(x)}^{C(y)}\colon C(x) \to C(y)$. Zeigen Sie, dass $F$ ein sinnvoll definierter Funktor von $\mathrm{Top}_0$ nach $\mathrm{Top}$ ist.

**Aufgabe G 11** Es sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Zeigen Sie, dass man wie folgt eine Kategorie $X$ erhält: Als Klasse von Objekten nimmt man die Menge $X$. Gegeben $x, y \in X$ gebe es einen Morphismus von $x$ nach $y$ genau dann, wenn $x \geq y$ (und dies sei dann auch der einzige Morphismus). Die Verknüpfung ist dann schon festgelegt. Sei nun auch $(Y, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, $F\colon X \to Y$ ein Funktor und

$$f\colon X \to Y, \quad x \mapsto F(x)$$

die zum Funktor gehörige Abbildung zwischen den Klassen von Objekten. Zeigen Sie, dass $f$ eine ordnungserhaltende Abbildung ist. Lässt sich jede ordnungserhaltende Abbildung so erhalten?

**Aufgabe G 12** Es seien $(X, x)$ und $(Y, y)$ punktierte topologische Räume. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Gruppen $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ und $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$ isomorph sind. Hierzu seien $p\colon X \times Y \to X$ und $q\colon X \times Y \to Y$ die Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente und

$$\Phi := (p_*, q_*)\colon \pi_1(X \times Y, (x, y)) \to \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi$ surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $F_1$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von einem Weg $\gamma_1$ in $X$, zu einem Weg $\eta_1$, und ist $F_2$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von einem Weg $\gamma_2$ in $Y$ zu einem Weg $\eta_2$, so ist $F = (F_1, F_2)$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von $(\gamma_1, \gamma_2)$ nach $(\eta_1, \eta_2)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\Phi$ auch injektiv ist und somit ein Isomorphismus.

## Hausübungen

**Aufgabe H 9** (a) Es sei $G$ ein Gruppoid über der Menge $X$ mit den Abbildungen $\alpha\colon G \to X$ (Anfangspunkt) und $\varepsilon\colon G \to X$ (Endpunkt). Zeigen Sie, dass man eine Kategorie erhält, wenn man $X$ als Menge von Objekten nimmt und $\mathrm{Mor}(x, y)$ definiert als die Menge aller $g \in G$ mit $\alpha(g) = x$ und $\varepsilon(g) = y$. Die Verknüpfung ist $f \circ g := gf$ für $f, g \in G$ mit $\varepsilon(g) = \alpha(f)$.

(b) Zeigen Sie, dass in der Kategorie aus (a) jeder Morphismus $g\colon x \to y$ ein Isomorphismus ist (d.h. es existiert ein Morphismus $h\colon y \to x$ mit $h \circ g = \mathrm{id}_x$, $g \circ h = \mathrm{id}_y$). Zudem ist dies eine sogenannte *kleine Kategorie*, d.h. die Klasse der Objekte ist eine Menge.

(c) Sei nun umgekehrt eine kleine Kategorie gegeben mit der Menge $X$ von Objekten. Angenommen, jeder Morphismus ist ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass sich dann die Menge $G$ aller Morphismen als Gruppoid auffassen lässt.

(d) Was muss man in (c) ändern damit sich $G$ sogar als Gruppe auffassen lässt.