Prof. Dr. Helge Glöckner — Sommersemester 2017
Jakob Schütt — 19.6.2017

# 8. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G 20** Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $P(\mathbb{K}^n)$ die Menge aller eindimensionalen $\mathbb{K}$-Untervektorräume von $\mathbb{K}^n$. Wir versehen $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit der von $\mathbb{K}^n$ induzierten Topologie und $P(\mathbb{K}^n)$ mit der Quotiententopologie bezüglich der Abbildung

$$q\colon \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \to P(\mathbb{K}^n), \quad x \mapsto \mathbb{K}x.$$

Man nennt $P(\mathbb{K}^{n+1})$ den *$n$-dimensionalen projektiven Raum über* $\mathbb{K}$. Wir nehmen nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ an und betrachten die Hilfsfunktion

$$h\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}_{n-1}, \quad x \mapsto \tfrac{x}{\|x\|^2}.$$

(a) Überlegen Sie sich, dass $q^{-1}(q(A)) = h^{-1}(A) \cup h^{-1}(-A)$ für jede Teilmege $A \subseteq \mathbb{S}_{n-1}$ gilt. Folgern Sie, dass die surjektive Abbildung

$$q|_{\mathbb{S}_{n-1}}\colon \mathbb{S}_{n-1} \to P(\mathbb{R}^n)$$

eine abgeschlossene Abbildung und somit eine Quotientenabbildung ist.

(b) Für $x, y \in \mathbb{S}_{n-1}$ definieren wir $x \sim y$, wenn $x = y$ oder $x = -y$. Folgern Sie, dass $P(\mathbb{R}^n)$ homöomorph zum Quotientenraum ${}^{\mathbb{S}_{n-1}}/_{\sim}$ ist.

(c) Es sei $X$ ein topologischer Raum, $G$ eine Gruppe und $\sigma\colon G \times X \to X, (g, x) \mapsto g.x$ eine Gruppenwirkung, sodass $\sigma(g, .)\colon X \to X$ für alle $g \in G$ ein Homöomorphismus ist. Wir versehen den *Bahnenraum* $G \setminus X := \{G.x \colon x \in X\}$ mit der Quotiententopologie bezüglich $q\colon X \to G \setminus X, \quad x \mapsto G.x$. Zeigen Sie, dass $q$ eine offene Abbildung ist. Zeigen Sie weiter, dass $G \setminus X$ Hausdorffsch ist, falls $G$ endlich und $X$ Hausdorffsch ist.

(d) Schließen Sie, dass ${}^{\mathbb{S}_{n-1}}/_{\sim}$ (und damit auch $P(\mathbb{R}^n)$) Hausdorffsch und kompakt ist.

**Aufgabe G 21** Es sei $X$ einer der Buchstaben $A, B, C, D, E, F, G, H$ oder $I$, aufgefasst als Teilmenge der Ebene, und $x_0 \in X$.

(a) Berechnen Sie bis auf Isomorphie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.

(b) Welche Buchstaben sind zueinander homöomorph, welche zueinander homotopieäquivalent? Sie dürfen anschaulich argumentieren.

**Aufgabe G 22** Es sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie punktierter topologischer Räume, wobei $I \neq \emptyset$. Weiter sei $X := \vee_{i\in I} X_i$ mit den Abbildungen $\theta_i \colon X_i \to X$ und dem Basispunkt $\theta_i(x_i) = x$. Sei nun auch $(Y, y)$ ein punktierter topologischer Raum und $f_i \colon (X_i, x_i) \to (Y, y)$ Morphismen punktierter topologischer Räume. Zeigen Sie, dass es genau einen Morphismus $f \colon (X, x) \to (Y, y)$ gibt, sodass $f \circ \theta_i = f_i$ für alle $i \in I$.

## Hausübungen

**Aufgabe H 13** Für eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ abelscher Gruppen definieren wir die *direkte Summe*

$$S := \bigoplus_{i\in I} A_i := \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \colon a_i \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i \in I\}.$$

Für $i \in I$ sei $\mu_i \colon A_i \to S$ die Inklusion. Alle $\mu_i$ sind injektive Gruppenmorphismen und die Elemente aus $S$ lassen sich in der Form

$$(a_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} \mu_i(a_i),$$

wobei nur endlich viele Summanden nicht null sind, schreiben. Die direkte Summe abelscher Gruppen hat folgende universelle Eigenschaft: Ist $A$ eine abelsche Gruppe und sind $\phi_i \colon A_i \to A$ Gruppenmorphismen, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\phi \colon S \to A$, sodass $\phi \circ \mu_i = \phi_i$ für alle $i \in I$. Dieser ist gegeben durch

$$\phi\Big(\sum_{i\in I} \mu_i(a_i)\Big) = \sum_{i\in I} \phi_i(a_i).$$

(a) Sei jetzt $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie beliebiger Gruppen und $G := \ast_{i\in I} G_i$. Zeigen Sie

$$G_{ab} \cong \bigoplus_{i\in I} (G_i)_{ab}.$$

(b) Folgern Sie, dass für die freie Gruppe $F(M)$ über einer Menge $M$ gilt

$$F(M)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{(M)}.$$

Folgern Sie, dass insbesondere $F(\{1, \dots, n\}) \ncong F(\{1, \dots, m\})$ für $m \neq n$ gilt.