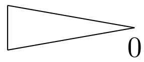
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
26.6.2017

9. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 23 (a) Betrachten Sie den folgenden Keil $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie

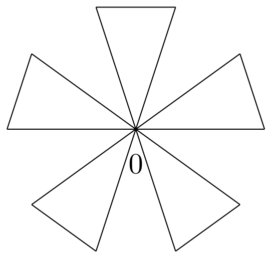
$V_1 :=$ 

.

Konstruieren Sie einen Isomorphismus punktierter topologischer Räume

$$\varphi\colon (V_1, 0) \to (\mathbb{S}_1, 1).$$

(b) Betrachten Sie das folgende Bukett von Keilen mit der induzierten Topologie

$V :=$ 

und berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(V, 0)$.

(c) Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{S}_n, (1, 0, \ldots, 0)\big)$.

Aufgabe G 24 Es sei $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe betrachten wir die Abbildung $q\colon D_n \to \mathbb{S}_n$, die 0 auf e_{n+1} schickt und $0 \neq x \in D_n$ auf

$$q(x) := \cos(\pi\|x\|) \cdot e_{n+1} + \sin(\pi\|x\|) \cdot (x/\|x\|, 0).$$

Zeigen Sie, dass q stetig und sogar eine Quotientenabbildung ist. Welche Punkte werden durch q miteinander identifiziert? Folgern Sie, dass $\mathbb{S}_n$ zu ${}^{D_n}/_{\sim}$ homöomorph ist, wobei $\sim$ alle Punkte in $\mathbb{S}_{n-1}$ als zueinander äquivalent erklärt.

Aufgabe G 25 Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap [n, n+1]$ in $[n, n+1]$ abgeschlossen ist für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) $X = \mathbb{R}$ ist ein 1-dimensionaler Zellenkomplex mit $X_0 = \mathbb{Z}$, $X_1 = \mathbb{R}$ und den charakteristischen Abbildungen $\psi_{1,n}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $\psi_{1,n}(t) := n + \frac{1}{2}(t+1)$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Hausübungen

Aufgabe H 14

(a) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A \cap [k, k+1] \times [l, l+1]$ in $[k, k+1] \times [l, l+1]$ abgeschlossen ist für alle $k, l \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass sich $X := \mathbb{R}^2$ zu einem 2-dimensionalen Zellenkomplex machen lässt, wobei $X_0 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $X_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Was sind die 1-Zellen, was die 2-Zellen?

(c) Es sei $X = \partial[-1,1]^2$ in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass X ein 1-dimensionaler Zellenkomplex ist.