

12. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 32 Seien G, H und $\varphi: G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenmorphismus.

- (a) Sei $M \subseteq G$. Zeigen Sie, dass $M \cdot (\ker \varphi) = M$ genau dann gilt, wenn M bezüglich φ *saturiert* ist in dem Sinn, dass $M = \varphi^{-1}(\varphi(M))$. Zeigen Sie auch: Ist $M \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist $\ker \varphi \subseteq M$ eine weitere äquivalente Bedingung.
- (b) Sei N ein Normalteiler von H . Seien weiter $X, Z \subseteq G$, sodass der Normalteiler $\ker \varphi$ von $X \subseteq G$ erzeugt wird und N von $\varphi(Z)$ erzeugt wird. Dann ist $\varphi^{-1}(N)$ der Normalteiler, der von $X \cup Z$ erzeugt wird.
- (c) Sei $\psi: G \rightarrow H$ ein Gruppenmorphismus. Zeigen Sie: Ist N der von $X \subseteq G$ erzeugte Normalteiler in G und M der von $\psi(X)$ erzeugte Normalteiler in H , dann gilt $\psi(N) \subseteq M$.

Aufgabe G 33 Aus Aufgabe G26 wissen wir, dass der n -dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ sich als Zellenkomplex mit je einer k -Zelle e_k für $0 \leq k \leq n$ beschreiben lässt. Die charakteristischen Abbildungen $\psi_n: D_n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ haben dabei folgende Eigenschaft:

$$\psi_n|_{\partial D_n}((x_1, \dots, x_n)) = [(x_1, \dots, x_n, 0)] \in \mathbb{R}P^{n-1} \subseteq \mathbb{R}P^n.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 6.18 die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}P^n, e_0)$.

Aufgabe G 34 In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es zu jeder Gruppe G einen 2-dimensionalen Zellenkomplex X gibt, sodass $\pi_1(X, x_0) \cong G$ für ein $x_0 \in X$. Der Zellenkomplex, den wir konstruieren werden, heißt auch *Präsentationskomplex von G* . Sei dazu $F(G)$ die freie Gruppe über G . Wir wissen bereits aus Aufgabe G18, dass es genau einen Gruppenmorphismus $\varphi: F(G) \rightarrow G$ gibt, sodass $\varphi([(g)]) = g$ für alle $g \in G$.

- (a) Finden Sie eine Charakterisierung von $\ker \varphi$ durch reduzierte Wörter in $F(G)$.
- (b) Wir konstruieren X wie folgt: Sei $X_0 := \{x_0\}$. Für jedes $g \in G$ fügen wir eine Kante $\overline{e_g}$ zu X_0 hinzu (da X_0 einpunktig ist, ist dies eindeutig). Nutzen Sie nun (a) und Satz 6.18 um 2-Zellen anzukleben, sodass $\pi_1(X, x_0) \cong G$.