Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
18.04.2018

1. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lipschitz Abbildungen)

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine C^1-Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, falls die Ableitung $\operatorname{grad} f$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{Lip}(f) \leq \|\operatorname{grad} f\|_\infty$ gelten muss.

(b) Seien $(X, d_x), (Y, d_Y)$ und (Z, d_Z) metrische Räume und $f\colon X \times Y \to Z$ eine Abbildung die getrennt Lipschitz-stetig ist (d.h. für festes $x \in X$ und festes $y \in Y$ sind $f(x, \cdot)$ bzw. $f(\cdot, y)$ Lipschitz-stetig). Zeigen Sie, dass falls Konstanten $L_X, L_Y > 0$ mit $\operatorname{Lip}(f(x, \cdot)) \leq L_X$ und $\operatorname{Lip}(f(\cdot, y)) \leq L_Y$ für alle $x \in X$ bzw. $y \in Y$ existieren, auch f Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe G2 (Lipschitz Störungen)

Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}$.

(a) Zeigen Sie, dass cos und f Lipschitz-stetig sind und finden Sie eine Abschätzung für $\operatorname{Lip}(\cos)$ und $\operatorname{Lip}(f)$.

(b) Folgern Sie, dass f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist und finden Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ Konstanten $a, b > 0$, so dass

$$B_{ar}(f(x)) \subseteq f(B_r(x)) \subseteq B_{br}(f(x))$$

gilt.

Aufgabe G3 (Vereinfachte Newtoniteration)

Sei $E = \mathbb{R}^k$ zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$, $x_0 \in E$, $r > 0$, und sei $f\colon B_r^E(x_0) \to E$ eine C^1-Abbildung, sodass $f'(x_0)$ invertierbar ist und

$$a := \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \operatorname{Lip}(f - f'(x_0)) > 0 \ \text{ und } \ \|f(x_0)\| < ar.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine eindeutige Nullstelle x_∞ in $B_r^E(x_0)$ hat.

(b) Zeigen Sie, dass $x_n := x_{n-1} - f'(x_0)^{-1}(f(x_{n-1})) \in B_r^E(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x_\infty$ für $n \to \infty$.