Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
21.06.2018

10. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Stabile Mannigfaltigkeiten sind zusammenhängend)

Es sei M eine auf einem Banachraum modellierte FC^k-Mannigfaltigkeit mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $g\colon M \to M$ ein FC^k-Diffeomorphismus. Weiter sei $p \in M$ ein Fixpunkt für g derart, dass $T_p g\colon T_pM \to T_pM$ hyperbolisch ist und

$$N := W_s(g,p)$$

die stabile Mannigfaltigkeit um p.

Zur Erinnerung:

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} g^{-n}(U)$$

wobei für eine offene Umgebung P von p in M

$$U = \{q \in P\colon g^n(q) \in P \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$$

und weiter U eine offene Teilmenge der immersierten Untermannigfaltigkeit N ist mit $g(U) \subseteq U$ und M und N die gleiche Topologie auf U induzieren.

Zeigen Sie:

(a) Für alle $q \in N$ gilt in der Topologie von N als immersierte Mannigfaltigkeit

$$\lim g^n(q) = p.$$

(b) Ist $V \subseteq N$ eine Umgebung in der Topologie als immersierte Untermannigfaltigkeit, so ist

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g^{-n}(V).$$

(c) N ist zusammenhängend.

(d) Ist N endlich-dimensional, so ist N eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen (also σ-kompakt).

Aufgabe G27 (Stabile Mannigfaltigkeiten in der Heisenberg-Gruppe)

$H := \mathbb{R}^3$ ist eine Gruppe mit der Multiplikation

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1 y_2);$$

diese entspricht der Multiplikation der 3×3-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_3 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ betrachten wir die (bijektive, diagonalisierbare lineare) Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) := (ax_1, bx_2, cx_3).$$

(a) Für welche (a, b, c) ist f ein Gruppenhomomorphismus $H \to H$ (und somit ein Automorphismus)?

(b) Es ist $f(0) = 0$, also 0 ein Fixpunkt von f. Berechnen Sie $f'(0)$. Für welche (a, b, c) wie in (a) ist $f'(0)$ hyperbolisch?

(c) Berechnen Sie für (a, b, c) wie in (b) die stabile Menge $W_s(f, 0)$ und zeigen Sie, dass diese eine (nicht nur immersierte) Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist (Fallunterscheidung!)

(d) Zeigen Sie, dass für die Dimension von $W_s(f, 0)$ alle Zahlen $0, 1, 2, 3$ vorkommen.

(e) Sei G eine topologische Gruppe (z.B. $(H, \cdot)$) mit Neutralelement e und $\alpha \colon G \to G$ ein Gruppenisomorphismus und Homöomorphismus. Dann ist $\alpha(e) = e$. Zeigen Sie, dass $W_s(\alpha, e)$ eine Untergruppe von G ist.