Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
28.06.2018

11. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Algebren mit stetiger Inversion)

Wir betrachten den Raum $C^\infty[0,1]$ der glatten Abbildungen von dem Kompaktum $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Wie wir bereits wissen, ist dieser Raum ein topologischer Vektorraum, dessen Topologie von der trennenden Familie von Normen $\|\cdot\|_k$ induziert wird. Die Normen sind gegeben durch $\|f\|_k := \max_{0\leq n\leq k} \|f^{(n)}\|_\infty$. Analog ist $(C^k[0,1], \|\cdot\|_k)$ ein Banachraum für $k \in \mathbb{N}_0$. Die punktweise Multiplikation $\beta_k \colon C^k[0,1] \times C^k[0,1] \to C^k[0,1], (f,g) \mapsto f \cdot g$ ist bilinear und macht $C^k[0,1]$ zu einer assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) β_∞ ist stetig und somit ist $C^\infty[0,1]$ eine lokalkonvexe topologische Algebra mit Eins.

(b) Jeder Banachraum $(A, \|\cdot\|)$ mit einer bilinearen Abbildung $\beta \colon A \times A \to A$, welche stetig und assoziativ ist, sowie ein Element $e \in A \setminus \{0\}$ mit $\beta(e,x) = x = \beta(x,e)$ existiert, kann zu einer Banachalgebra mit Eins gemacht werden. Somit kann $(C^k[0,1], \beta_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ zu einer Banachalgebra mit Eins gemacht werden.

(c) Die Einheitengruppe $(C^\infty[0,1])^\times$ ist offen,

(d) Die Inversion $\eta \colon (C^\infty[0,1])^\times \to (C^\infty[0,1])^\times, f \mapsto \frac{1}{f}$ ist stetig und $(C^\infty[0,1], \beta_\infty)$ besitzt somit die Struktur einer Algebra mit stetiger Inversion.

Hinweis: Sie dürfen die Leibnizregel $(g \cdot f)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^k(x) f^{n-k}(x)$ für C^n-Abbildungen verwenden.