Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
05.07.2018

12. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G29 (C^k-Abbildungen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to F$ eine Abbildung in einen topologischen Vektorraum F. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann eine C^1-Abbildung, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existieren und stetig sind.

(b) f ist genau dann eine C^k-Abbildung, wenn die iterierten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_{j_r}} \frac{\partial}{\partial x_{j_{r-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} f$ für $0 \leq r \leq k$ und $j_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren und stetig sind.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie man die partielle Ableitung in dem Differentialkalkül aus der Vorlesung ausdrücken würde.

Aufgabe G30 (Abbildungen in Unterräume)

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume und $U \subseteq E$ eine offene Teilmenge. Wir betrachten einen folgenabgeschlossenen Unterraum $F_0 \subseteq F$ und eine Abbildung $f\colon U \to F$ mit $f(U) \subseteq F_0$. Zeigen Sie, dass f genau dann eine C^k-Abbildung ist, wenn $f^{|F_0}\colon U \to F_0$ eine C^k-Abbildung ist für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Aufgabe G31 (C^k ist eine lokale Eigenschaft)

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume und $U \subseteq E$ eine offene Teilmenge. Seien $f\colon U \to F$ eine C^k-Abbildung, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U. Zeigen Sie, dass f genau dann C^k ist, wenn die Abbildungen $f_{|U_i}$, $i \in I$ C^k-Abbildungen sind. In diesem Sinne ist die Eigenschaft eine C^k-Abbildung zu sein, eine lokale Eigenschaft.