Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
27.04.2018

2. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Hyperbolische Automorphismen)

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$. Bezeichne mit $\operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen λ, μ auf der Diagonale. Wir betrachten die Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \operatorname{diag}(\lambda, \mu) \cdot x$.

(a) Finden Sie alle Möglichkeiten λ, μ zu wählen, so dass A ein hyperbolischer Automorphismus mit angepasster Norm $\left\|(x, y)\right\|_\infty := \max\left\{|x|, |y|\right\}$ ist. Beschreiben Sie außerdem die stabilen und instabilen Unterräume.

(b) Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f\colon X \to Y \times Z, x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ zwischen metrischen Räumen $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ mit Lipschitz-stetigen Komponenten f_1, f_2 bereits f Lipschitz-stetig ist mit $\operatorname{Lip}(f) = \max\left\{\operatorname{Lip}(f_1), \operatorname{Lip}(f_2)\right\}$.

(c) Zeigen Sie, dass für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + \frac{1}{4}\sin(y), \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\cos(x))$ ein Homöomorphismus $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass $f \circ h = h \circ A$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie auch in Aufgabenteil b) die Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe G5 (Ein nicht linearisierbares System)

(a) Gegeben $\varepsilon > 0$ betrachten wir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + \varepsilon\sin(x)$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, f)$ zu keinem linearem System $(\mathbb{R}, A)$ (d.h. $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine linear Abbildung) topologisch konjugiert ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum Linearisierungssatz von Grobman und Hartman?
Hinweis: Betrachten Sie die Fixpunkte von f.

(b) Zeigen Sie, dass eine zu (a) analoge Aussage auch für $f(x) := x + g_\varepsilon(x)$ gilt mit

$$g_\varepsilon(x) := \varepsilon\frac{x^3(x^2 - 1)}{1 + x^6}.$$

Hier ist zusätzlich $f'(0) = 1$ und g_ε ist Lipschitz (da beschränkte Ableitung) mit $\operatorname{Lip}(g_\varepsilon) = \varepsilon\operatorname{Lip}(g_1)$ beliebig klein.

Aufgabe G6 (Banachscher Fixpunktsatz)

Betrachten Sie den Banachraum $[0,1]$ und die Familie von Abbildungen
$f_a\colon [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto a \cdot \exp(-x)$, wobei $a \in [0,1]$.

(a) Finden Sie für beliebiges a eine abgeschlossenen Teilmenge $E_a \subseteq [0,1]$, auf die f_a eingeschränkt werden kann und eine Kontraktion ist. Man folgere, dass für jedes a die Abbildung f_a auf diesem Unterraum einen Fixpunkt x_a besitzt.

(b) Betrachten Sie $x_0 = \frac{1}{2}$. Finden Sie eine möglichst gute Abschätzung für den Abstand von $x_1 = f_a(x_0)$ und x_a.

Wir betrachten nun die Fibonacci Zahlen. Wie bekannt ist, sind die Fibonacci Zahlen rekursiv definiert als: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$ und $f_0 := f_1 := 1$. Wir betrachten den Quotienten $x_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$ und die Abbildung $\theta\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. Zeigen Sie

c) für $n \geq 1$ gilt $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = \theta(x_n)$.

d) $\theta(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ für alle $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ und θ ist eingeschränkt auf $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ eine Kontraktion. Man folgere, dass die Folge $(x_n)_n$ einen eindeutigen Fixpunkt Φ besitzt und berechne diesen.

Der Fixpunkt Φ ist auch als "goldener Schnitt" bekannt.