Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
03.05.2018

3. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Anwendung des Hahn-Banachschen Fortsetzungssatzes)

Sei E ein lokalkonvexer Raum, $x_0 \in E$ und $p\colon E \to [0, \infty[$ eine stetige Halbnorm.

(a) Finden Sie eine Norm $\|\cdot\|_p$, sodass $E_p := E \big/ p^{-1}(0)$ zu einem normierten Raum wird.

(b) Folgern Sie mit Hilfe des Hahn-Banachschen Fortsetzungssatzes, dass ein stetiges lineares Funktional $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $\lambda(x_0) = p(x_0)$ und $|\lambda(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$.

Aufgabe G8 (Lemma von Wallace)

In dieser Aufgabe zeigen wir das folgende Lemma von Wallace. Seien X_1, X_2 topologische Räume, $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ kompakt und $U \subseteq X_1 \times X_2$ offen mit $K_1 \times K_2 \subseteq U$. Dann existieren offene Mengen $U_1 \subseteq X_1$ und $U_2 \subseteq X_2$ mit $K_1 \times K_2 \subseteq U_1 \times U_2$.
Gehen Sie beim Beweis wie folgt vor: Für $(x, y) \in K_1 \times K_2$ gibt es offene Umgebungen $V_{x,y}$ von x in X_1 und $W_{x,y}$ von y in X_2, sodass $V_{x,y} \times W_{x,y} \subseteq U$.

(a) Für festes $x \in K_1$ finden Sie eine endliche Menge $F_x \subseteq K_2$, sodass $K_2 \subseteq \bigcup_{y \in F_x} W_{x,y} =: Q_x$ und $P_x := \bigcap_{y \in F_x} V_{x,y}$ eine offene Umgebung von x ist.

(b) Verwenden Sie nun ein analoges Argument mit den Mengen P_x und Q_x um das Lemma zu beweisen.

Aufgabe G9 (Substitution)

Sei E ein lokalkonvexer Raum und $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle. Zeigen Sie: Ist $f\colon J \to E$ eine C^0-Kurve und $\varphi\colon I \to J$ eine C^1-Funktion, so existiert für $a, b \in I$ das schwache Integral $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ in E genau dann wenn $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ in E existiert. In diesem Fall gilt Gleichheit.

Aufgabe G10 (Partielle Integration)

Sei $\beta\colon E_1 \times E_2 \to$F eine stetige bilineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen. Seien $\gamma_1\colon I \to E_1$ und $\gamma_2\colon I \to E_2$ C^1-Kurve, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Kurve

$$\gamma\colon I \to F, \quad \gamma(t) := \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

eine C^1-Kurve ist und $\gamma'(t) = \beta(\gamma_1'(t), \gamma_2(t)) + \beta(\gamma_1(t), \gamma_2'(t))$ gilt. Zeigen Sie, dass für $a, b \in I$ das schwache Integral $\int_a^b \beta(\gamma_1(t), \gamma_2'(t))dt$ in F genau dann existiert, wenn $\int_a^b \beta(\gamma_1'(t), \gamma_2(t))dt$ in F existiert und in diesem Fall

$$\int_a^b \beta(\gamma_1(t), \gamma_2'(t))dt = [\beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t))]_a^b - \int_a^b \beta(\gamma_1'(t), \gamma_2(t))dt$$

gilt.