Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
17.05.2018

5. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Invertieren von blockweisen Operatoren)

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $D \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ eine Matrix mit der Blockgestalt

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, C \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Zeigen Sie, dass D genau dann invertierbar ist, wenn A und C invertierbar sind und bestimmen Sie für diesen Fall D^{-1}.

(b) Seien E_1, E_2 Banachräume und $A \in \mathrm{GL}(E_1)$, $C \in \mathrm{GL}(E_2)$ und $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Zeigen Sie, dass die stetige lineare Abbildung

$$D\colon E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2, \quad (x, y) \mapsto (Ax, Bx + Cy)$$

invertierbar ist.

Aufgabe G15 (Newtonverfahren)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $f\colon U \to E$ eine FC^1-Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq E$ und $x_\infty \in U$, sodass $f(x_\infty) = 0$ und $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$.

(a) Sei $r > 0$, sodass $B_r^E(x_\infty) \subseteq U$. Nach Verkleinern von r können wir annehmen, dass $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ für alle $x \in B_r^E(x_\infty)$ und $M := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{op} \colon x \in B_r^E(x_\infty)\} < \infty$. Nach weiterem Verkleinern können wir auch

$$L := M \sup\{\|f'(x) - f'(y)\|_{op} \colon x, y \in B_r^E(x_\infty)\} < 1$$

annehmen. Zeigen Sie, dass das Bild von

$$g_x\colon B_r^E(x_\infty) \to E, \quad y \mapsto y - f'(x)^{-1}(f(y))$$

für jedes $\in B_r^E(x_\infty)$ in $B_r^E(x_\infty)$ enthalten ist, und dass g_x eine Kontraktion ist mit

$$\mathrm{Lip}(g_x) \leq \frac{1}{\|f'(x)\|_{op}} \mathrm{Lip}(f - f'(x)) \leq L.$$

Für $x_0 \in B_r^E(x_\infty)$ können wir also

$$x_n := g_{x_{n-1}}(x_{n-1}) = x_{n-1} - f'(x_{n-1})^{-1}(f(x_{n-1})) \in B_r^E(x_\infty)$$

rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren. Folgern Sie $\|x_n - x_\infty\| \leq L^n \|x_0 - x_\infty\|$ für $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.

(b) Um das asymptotische Verhalten besser abschätzen zu können, definieren wir

$$\theta_s := M \sup\{\|f'(x) - f'(y)\|_{op} \colon x, y \in \overline{B}_s^E(x_\infty)\} \text{ für } s \in [0.r[.$$

Dann gilt $\theta_s \leq L < 1$ für alle $s \in [0, r[$ und $\theta_s \to 0$ für $s \to 0$. Zeigen Sie

$$\operatorname{Lip}(g_x|_{\overline{B}^E_{\|x-x_\infty\|}(x_\infty)}) \leq \theta_{\|x-x_\infty\|}$$

für alle $x \in B_r^E(x_\infty)$ und folgern Sie, dass in der Situation von (a)

$$\|x_n - x_\infty\| \leq \theta_{\|x_{n-1}-x_\infty\|} \cdots \theta_{\|x_0-x_\infty\|} \|x_0 - x_\infty\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Folgern Sie aus (b): Gegeben $x_0 \in B_r^E(x_\infty)$, so existiert für alle $\theta > 0$ ein $C > 0$, sodass $\|x_n - x_\infty\| \leq C\theta^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Nun nehmen wir an, dass f sogar FC^2 ist. Insbesondere ist dann f' eine FC^1-Abbildung und somit lokal lipschitzstetig. Falls nötig können wir r nochmals verkleinern um zu erreichen, dass ein $K > 0$ existiert, sodass $\|f'(y) - f'(x)\|_{op} \leq K\|y - x\|$ für alle $x, y \in B_r^E(x_\infty)$ und somit

$$\theta_s \leq 2MKs \text{ für alle } s \in [0, r[.$$

Dann gilt $\|x_n - x_\infty\| \leq \theta_{\|x_{n-1}\|} \|x_{n-1} - x_\infty\| \leq MK\|x_{n-1} - x_\infty\|^2$ und daher

$$MK\|x_n - x_\infty\| \leq (MK\|x_{n-1} - x_\infty\|)^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit der Bezeichnung $\delta_n := MK\|x_n - x_\infty\|$ bedeutet das

$$\delta_n \leq \delta_{n-1}^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

(in der Literatur wird diese Abschẗzung auch „lokal quadratische Konvergenz“ genannt). Für ein festes $\theta \in]0, 1[$ existiert $n_\theta \in \mathbb{N}$, sodass $\delta_{n_\theta} \leq \theta$. Folgern Sie

$$\delta_{n_\theta + k} \leq \theta^{(2^k)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

und schließen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, sodass $\|x_n - x_\infty\| \leq C\theta^{(2^n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.