Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
31.05.2018

7. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Kreisgruppe und Immersionen)

(a) Sei $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \colon |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass die offene Teilmenge $\mathbb{S} \cap \mathbb{R}\times\,]0,\infty[$ von $\mathbb{S}$ Graph einer C^∞-Funktion ist und somit eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Jeder andere Punkt von $\mathbb{S}$ liegt in einer analogen Menge, die Graph einer Funktion von x oder y ist; folgern Sie, dass $\mathbb{S}$ eine auf $\mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R}$ modellierte glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, $\theta(t) := e^{it}$ eine C^∞-Abbildung ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\theta|_{]-\pi/2,\pi/2[}$ ein Diffeomorphismus auf die offene Teilmenge $W := \mathbb{S}\cap\,]0,\infty[\times\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$ ist mit Umkehrabbildung $\psi_0\colon W \to\,]-\pi/2,\pi/2[$, $(x,y) \to \arcsin(y)$. Also ist ψ_0 eine Karte für $\mathbb{S}$.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in \mathbb{S}$ die Abbildung

$$\lambda_g\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}, \quad z \mapsto gz$$

(Multiplikation mit der komplexen Zahl g) C^∞ ist. Was ist $\lambda_g \circ \lambda_h$ wenn $g, h \in \mathbb{S}$? Ist $\lambda_g\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ ein Diffeomorphismus?

(e) Es ist $\theta(s) = \theta(t + s - t) = \theta(t)\theta(s - t) = (\lambda_{\theta(t)} \circ \theta)(s - t)$ für $s, t \in \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass

$$\theta|_{]t-\pi/2,t+\pi/2[}\colon\ ]t - \pi/2, t + \pi/2[\, \to \theta(t)W$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist, somit die Umkehrfunktion

$$\psi_t\colon \theta(t)W \to\ ]t - \pi/2, t + \pi/2[$$

eine Karte für $\mathbb{S}$ um $\theta(t)$.

Aufgabe G20 (Immersionen vs. Einbettungen)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S} \times \mathbb{S}, \quad f(t) := (e^{it}, e^{i\sqrt{2}t}),$$

welche ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(a) Zeigen Sie, dass f eine C^∞-Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie $g_t := (\psi_t \times \psi_{\sqrt{2}t}) \circ f|_{]t-\pi/(2\sqrt{2}),t+\pi/(2\sqrt{2})[}$. Zeigen Sie, dass das Bild von g_t eine Untermannigfaltigkeit in $]t-\pi/2, t+\pi/2[\times]\sqrt{2}t-\pi/2, \sqrt{2}t+\pi/2[$ ist und g_t ein Diffeomorphismus auf diese Untermannigfaltigkeit. Folgern Sie, dass $f(]t-\pi/(2\sqrt{2}), t+\pi/(2\sqrt{2})[)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ ist und $f|_{t-\pi/(2\sqrt{2}),t+\pi/(2\sqrt{2})[}$ eine Diffeomorphismus auf selbige. Schließen Sie, dass f eine Immersion ist.

(c) Wir betrachten nun den injektiven Gruppenhomomorphismus $f|_{2\pi\mathbb{Z}} \colon 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{S}\times\mathbb{S}$, $f(2\pi n) = (1, e^{i2\pi\sqrt{2}t})$ auf $(2\pi\mathbb{Z}, +)$. Zeigen Sie, dass

$$\{e^{2\pi i\sqrt{2}n} \colon n \in \mathbb{Z}\}$$

eine unendliche Untergruppe von $\mathbb{S}$ ist.

(d) Man kann zeigen, dass jede unendliche Untergruppe H von $\mathbb{S}$ in $\mathbb{S}$ dicht ist. Folgern Sie aus dieser Tatsache und (c), dass es eine Folge $n_k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $|n_k| \to \infty$ für $k \to \infty$ aber

$$\lim_{k\to\infty} f(n_k) = (1,1).$$

Daher kann $f|^{f(\mathbb{R})} \colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ kein Homöomorphismus sein (und f ist keine Einbettung von Mannigfaltigkeiten). Also ist $f(\mathbb{R})$ (mit der Mannigfaltigkeitsstruktur, die $f|^{f(\mathbb{R})}$ zu einem Diffeomorphismus macht, eine immersierte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{S}\times\mathbb{S}$, jedoch keine Untermannigfaltigkeit

(e) Beweisen Sie die in (d) erwähnte Tatsache durch einen Widerspruchsbeweis; andernfalls gäbe es ein $g \in \mathbb{S}$ und eine offene Umgebung V von g mit $V \cap H = \emptyset$. O.B.d.A. $V = e^{i]t-\varepsilon,t+\varepsilon[}$. Zeigen Sie, dass $g^{-1}V \cap H = e^{i]-\varepsilon,\varepsilon[} \cap H = \{1\}$. Erreichen Sie nun einen Widerspruch.