Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
07.06.2018

8. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

Gruppenübung

Aufgabe G21 (Graphen sind Untermannigfaltigkeiten)

Seien M und N FC^k-Mannigfaltigkeiten modelliert auf den normierten Räumen E und F und sei $f\colon M \to N$ eine FC^k-Abbildung. In dieser Aufgabe wollen wir den Beweis der Vorlesung, dass $\mathrm{Graph}(f) \subseteq M \times N$ eine Untermannigfaltigkeit ist, vervollständigen. Sei dazu $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ eine Karte um $p \in M$ und $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ eine Karte um $f(p)$. Nach Verkleinern dürfen wir $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ annehemen. Wir definieren

$$\theta\colon U_\varphi \times U_\psi \to V_\phi \times F, \quad (x,y) \mapsto (\varphi(x), \psi(f(x)) - \psi(y)).$$

Es gilt $\mathrm{pr}_2 \circ \theta(x,y) = 0$ genau dann, wenn $(x,y) \in \mathrm{Graph}(f)$. Zeigen Sie, dass θ eine Karte von $M \times N$ ist.

Aufgabe G22 (Stabile Mannigfaltigkeit)

Sei E ein Banachraum, $\alpha\colon E \to E$ ein hyperbolischer Automorphismus und $g\colon E \to E$ beschränkt und Lipschitz-stetig mit $g(0) = 0$, sodass $f := \alpha + g$ den Satz von Grobman-Hartman erfüllt. Insbesondere gibt es einen Homöomorphismus $\varphi\colon E \to E$ mit $\varphi(0) = 0$, sodass $f \circ \varphi = \varphi \circ \alpha$. Zeigen Sie:

(a) $E_s = W^s(\alpha)$,

(b) $\varphi(W^s(\alpha)) = W^s(f)$ und

(c) $W^s(f)$ ist eine auf E_s modellierte topologische Mannigfaltigkeit.