Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

SS 2018
14.06.2018

# 9. Übungsblatt zur „Vorlesung Nichtlineare Funktionalanalysis“

## Gruppenübung

**Aufgabe G23** (Immersierte Untermannigfaltigkeit sind lokal Untermannigfaltigkeiten)

Seien $N, M$ auf einem Banachraum modellierte $FC^k$-Mannigfaltigkeiten, sodass $N \subseteq M$ gilt. Dann heißt $N$ eine *immersierte Untermannigfaltigkeit von* $M$, wenn die Inklusion $i\colon N \to M$ eine Immersion ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall jeder Punkt $p \in N$ eine offene Umgebung $U$ in $N$ hat, sodass $U$ eine Untermannigfaltigkeit von $M$ ist.

**Aufgabe G24** (Abbildungen zwischen gewichtetetn Folgenräumen)

Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und $a \in ]0,1]$. Wir definieren

$$\mathcal{F}_a(E) := \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \colon a^{-n} x_n \to 0 \text{ für } n \to \infty\}.$$

(a) Sei $x := (x_n) \in \mathcal{F}_a(E)$. Wir definieren die Norm $\|x\|_a := \sup\{a^{-n}\|x_n\|_E\}$ auf $\mathcal{F}_a(E)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}_a(E) \to c_0(E), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto (a^{-n}x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

(b) Für $U \subseteq E$ offen mit $0 \in U$ definieren wir

$$\mathcal{F}_a(U) := \{(x_n) \in \mathcal{F}_a(E) \colon x_n \in U \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_a(U)$ offen in $\mathcal{F}_a(E)$ ist.

(c) Sei $U$ wie in (b), $F$ ein normierter Raum und $f\colon U \to F$ Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{F}_a(f)\colon \mathcal{F}_a(U) \to \mathcal{F}_a(F), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$$

wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist.

**Aufgabe G25** (Iterieren global vs. lokal)

Seien $M, N$ auf einem Banachraum modellierte $FC^k$-Mannigfaltigkeiten und $\varphi\colon M \to N$ ein $FC^k$-Diffeomorphismus. Sei weiter $U \subseteq M$ offen mit $p \in U$ und $f\colon U \to M$ eine $FC^k$-Abbildung, sodass $f(p) = p$. Wir setzen $g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$. Sei $x \in U$. Zeigen Sie:

(a) $f^n(x)$ ist genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, wenn $g^n(\varphi(x))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist,

(b) es gilt $f^n(x) \to p$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn $g^n(\varphi(x)) \to \varphi(p)$ für $n \to \infty$ und

(c) es gilt $\varphi(W^s(f)) = W^s(g)$.

Insbesondere ist $W^s(f)$ genau dann eine Untermannigfaltigkeit, wenn $W^s(g)$ eine Untermannigfaltigkeit ist.