Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
31.10.2013

3. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Ein Induktionsbeweis)

Robespierre will die erste These der Julirevolution “Alle Menschen sind gleich ”wissenschaftlich beweisen. Dazu macht er den folgenden Induktionsbeweis:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Je n Menschen sind gleich.

Beweis: Gegeben sei ein Mensch. Er ist gleich sich selber. Dies ist der Induktionsanfang. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben und die Aussage für n wahr. Gegeben seien $n + 1$ Menschen. Nehme einen Menschen p heraus. Der Rest ist gleich. Füge p der Menge von Menschen wieder hinzu und nehme einen anderen Menschen q heraus. Die restlichen sind wieder gleich. Also ist p gleich dem Rest. QED

Ist Robespierres Beweis richtig?

Aufgabe G2 (Induktion)

Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G3 (Abzählbarkeit von Mengen)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Menge X ist genau dann abzählbar, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon X \to \mathbb{N}$ gibt.
(b) Sind X eine abählbare Menge, Y eine Menge und $f\colon X \to Y$ eine surjektive Funktion, dann ist auch Y abzählbar.
(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie, dass $\mathbb{N}^n$ abzählbar ist.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Abzählbarkeit; 5 Punkte)

Sei X eine abzählbare Menge. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathcal{E}_n(X) := \{M \subseteq X : \#M \leq n\}$ der maximal n-elementigen Teilmengen von X abzählbar.
(b) Die Menge $\mathcal{E}(X)$ aller endlichen Teilmengen von X ist abzählbar.

Aufgabe H2 (Induktion; 5 Punkte)

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & : n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & : n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe H3 (Das Zählen von Abbildungen; 5 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ sowie M eine m-elementige Menge, und N eine n-elementige Menge. Zeigen Sie (mit Induktion nach m):

(a) Es gibt n^m Abbildungen $f\colon M \to N$. Sie müssen nicht zeigen, dass es nur n verschiedene Abbildungen aus einer einelementigen Menge in eine n-elementige Menge gibt.
Bemerkung. Man schreibt N^M für die Menge der Abbildungen von M nach N. Nach obigem gilt also $\#(N^M) = (\#N)^{\#M}$ für endliche Mengen M und N.

(b) Für $n \geq m$ gibt es

$$\prod_{j=0}^{m-1} (n-j)$$

injektive Abbildungen von M nach N.