

8. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Einige Zahlenfolgen I)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

- (a) $a_n = n^{-k}$ für festes $k \in \mathbb{N}$
- (b) $a_n = \frac{(3n-4)(n^2+1)}{7n(2n^2+1.000)}$
- (c) $a_n = \frac{3(n+1)^{10}}{2(n^2+n+1)^5}$
- (d) $a_n = \frac{(3n+1)^3}{(2n-1)(2-3n)^2}$
- (e) $a_n = \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^k$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$

Aufgabe G2 (Eine rekursiv definierte Folge)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := 1 + \frac{a_n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Folgern Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- (c) Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe G3 (Folgen und abgeschlossene Mengen I)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Folge in A , die in X gegen ein $a \in X$ konvergiert, so ist $a \in A$.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Einige Sätze über Zahlenfolgen; 5 Punkte)

- (a) Seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen z in $\mathbb{C}$ konvergiert, wenn in $\mathbb{R}$ die Folgen $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Re}(z)$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Im}(z)$ konvergieren. **Hinweis:** Der Einfachheit halber schreiben wir $x_n := \operatorname{Re}(z_n)$, $y_n := \operatorname{Im}(z_n)$, $x := \operatorname{Re}(z)$ und $y := \operatorname{Im}(z)$. Verwenden Sie $\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$.
- (b) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiere gegen $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = a.$$

- (c) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =: x$, zeigen Sie, dass auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Aufgabe H2 (Einige Zahlenfolgen II; 5 Punkte)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz. **Hinweis:** Beachten Sie bei den komplexen Folgen Aufgabe H1 (a).

- (a) $a_n = \frac{n}{n+1} + i \frac{2^n+1}{3^n}$
 (b) $a_n = i^n$
 (c) $a_n := \sum_{k=0}^n x_k + \frac{1}{x_k}$, wobei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]0, \infty[$ ist. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.
 (d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **Hinweis:**, Verwenden Sie die versteckte Eins $1 = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
 (e) $a_n = \left(\frac{n^3}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, **Hinweis:** Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz für $2^n = (1+1)^n$.
 (Alternativ kann man auch eine Induktion verwenden)

Aufgabe H3 (Folgen und abgeschlossene Mengen II; 5 Punkte)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, sodass für jede Folge (a_k) in A , die gegen ein $a \in X$ konvergiert, bereits $a \in A$ gilt. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.