Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
17.01.2014

# 12. Übungsblatt zur „Analysis I“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G1** ($\varepsilon$-$\delta$-Kriterium)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} -x & : x \leq 0 \\ 5x & : x > 0 \end{cases}$$

in 0 stetig ist. Ist $f$ eine stetige Funktion? Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Funktion.

(b) Zeigen Sie mit dem $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & : x \leq 0 \\ x+1 & : x > 0 \end{cases}$$

unstetig ist. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Funktion.

**Aufgabe G2** (Eine nirgends stetige Funktion)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt stetig ist.

**Aufgabe G3** (Eine andere Formulierung von Stetigkeit)

Seien $X$ und $Y$ metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn für jede abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq Y$ die Menge $f^{-1}(A)$ in $X$ abgeschlossen ist.

## Hausübungen

**Aufgabe H1** ($\varepsilon$-$\delta$-Kriterium)

Wir betrachten die Abbildung $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, dass $f$ in 0 stetig ist.
(b) Zeigen Sie mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums, dass $f$ in jedem $x > 0$ stetig ist. **Hinweis:** Gegeben $x$ und $\varepsilon$ erhält man ein mögliches $\delta$ durch $\varepsilon \cdot \sqrt{x}$.

**Aufgabe H2** (Klebelemma)

Seien $X$ und $Y$ metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von $X$, sodass $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn $f|_{U_i}$ für alle $i \in I$ stetig ist.
(b) Seien $A$ und $B$ abgeschlossene Teilmengen von $X$, sodass $A \cup B = X$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann stetig ist, wenn $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind.

Die Aussagen in (a) und (b) gelten auch, wenn X und Y beliebige topologische Räume sind.

**Aufgabe H3** (Eine Funktion, die nur in irrationalen Punkten stetig ist)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & : x \neq \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd} \end{cases}$$

in einem $x \in \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn $x$ irrational ist. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ und ein irrationales $x$ die Menge

$$A = \left\{ y \in \mathbb{Q} \cap [x-1, x+1] : y = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd und } \frac{1}{q} > \varepsilon \right\}$$

endlich ist.