Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2013/2014
24.10.2013

2. Übungsblatt zur „Analysis I“

Wichtig: Bitte geben Sie die Hausübungen in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Rechnen mit Mengen)

Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A \cap B = A$
(ii) $A \subseteq B$
(iii) $A \cup B = B$.

Hinweis: Weisen Sie die Äquivalenz durch einen Ringschluss nach, d.h., beweisen Sie (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i)

Lösung: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $a \in A$, dann folgt aus (i) $a \in A \cap B$. Hieraus erhalten wir $a \in B$. Da $a \in A$ beliebig war folgern wir $A \subseteq B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Um die Gleichheit in (iii) nachzuweisen, zeigen wir als erstes $A \cup B \subseteq B$. Sei dazu $x \in A \cup B$. Im Falle $x \in B$ sind wir fertig. Im Falle $x \in A$ folgt mit (ii), $x \in B$. In beiden Fällen gilt also $x \in B$. Da x beliebig war folgt die Aussage. Nun zeigen wir $B \subseteq A \cup B$. Dies ist aber klar nach Definition der Vereinigung

(iii) $\Rightarrow$ (i): Die Inklusion $A \cap B \subseteq A$ ist klar. Wir müssen also nur $A \subseteq A \cap B$ zeigen. Sei hierzu $x \in A$. Mit (iii) gilt $x \in A \cup B = B$. Da also x ein Element von A und von B ist folgt $x \in A \cap B$.

Aufgabe G2 (De Morgansche Regeln für Mengen und Ausmultiplizieren von Mengen)

Seien X, A, B Mengen. Zeigen Sie:

(a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
(b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
(c) $X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$
(d) $X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B)$.

Lösung:

(a) Wir zeigen $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Zunächst machen wir uns “$\subseteq$ ”klar. Dazu sei $x \in X \setminus (A \cap B)$. Wir wissen also, dass $x \in X$ und $x \notin A \cap B$. Um zu zeigen, dass x in der rechten Seite liegt, machen wir eine Fallunterscheidung.
1.Fall $x \in A$. In diesem Fall muss $x \notin B$ gelten, da sonst $x \in (A \cap B$ folgen würde, dies wäre aber ein Widerspruch. Mit $x \in X$ erhalten wir also $x \in X \setminus B$. Insbesondere folgt $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

2. Fall $x \notin A$. In diesem Fall folgt mit $x \in X$ direkt $x \in X \setminus A$. Damit sehen wir, dass auch in diesem Fall x in der rechten Seite enthalten ist.
Nun machen wir uns "$\supseteq$"klar. Sei dazu $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in X \setminus A$. Wir folgern $x \in X$ und $x \notin A$. Insbesondere erhalten wir $x \notin A \cap B$. Wir sehen, $x \in X \setminus (A \cap B)$.
2. Fall $x \in X \setminus B$. Hier argumentieren wir analog zu Fall 1. und erhalten $x \in X \setminus (A \cap B)$.

(b) Wir zeigen $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
Zunächst zeigen wir "$\subseteq$". Sei $x \in X \setminus (A \cup B)$. Wir erhalten $x \in X$ und $x \notin A \cup B$. Aus $x \notin A \cup B$ folgern wir $x \notin A$ sowie $x \notin B$. Mit $x \in X$ und $x \notin A$ erhalten wir also $x \in X \setminus A$. Mit $x \in X$ und $x \notin B$ erhalten wir $x \in X \setminus A$. Insgesammt erhalten wir also $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
Jetzt machen wir uns "$\supseteq$"klar. Sei dazu $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Wir folgern $x \in X \setminus A$. Daraus folgt $x \in X$ und $x \notin A$. Desweiteren erhalten wir aus $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ auch $x \in (X \setminus B)$ und folgern hierraus $x \notin B$. Mit $x \notin A$ und $x \notin B$ folgern wir $x \notin A \cup B$. Mit $x \in X$ erhalten wir $x \in X \setminus (A \cup B)$.

(c) Wir zeigen $X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Zunächst machen wir uns "$\subseteq$"klar. Sei dazu $x \in X \cap (A \cup B)$. Dann ist $x \in X$ und $x \in A \cup B$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in A$. Dann folgt mit $x \in X$ direkt $x \in (X \cap A) \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B)$.
2. Fall $x \in B$. Wir erhalten mit $x \in X$ direkt $x \in X \cap B \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B)$
Nun machen wir uns "$\supseteq$"klar. Sei dazu $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in (X \cap A)$. Wir folgern $x \in X$ und $x \in A$. Hieraus erhalten wir $x \in A \cup B$ und schließen $x \in X \cap (A \cup B)$.
2. Fall $x \in (X \cap B)$. Wir argumentieren analog zu Fall 1. und erhalten $x \in X \cap (A \cup B)$.

(d) Wir zeigen $X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B)$. Zunächst zeigen wir "$\subseteq$. Sei $x \in X \cup (A \cap B)$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: $x \in X$. Dann gilt $x \in X \cup A$ und $x \in X \cup B$. Wir erhalten $x \in (X \cup A) \cap (X \cup B)$.
2. Fall: $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$. Insbesondere erhalten wir $x \in A \cup X$ und $x \in B \cup X$. Wir folgern $x \in (X \cup A) \cap (X \cup B)$.
Nun zeigen wir "$\supseteq$". Sei also $x \in x \in (X \cup A) \cap (X \cup B)$. Wir erhalten $x \in X \cup A$ und $x \in X \cup B$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in X$: Wir erhalten direkt $x \in X \cup (A \cap B)$.
2. Fall $x \notin X$: Aus $x \in X \cup A$ folgt direkt $x \in A$ und aus $x \in X \cup B$ folgt $x \in B$. Wir erhalten $x \in A \cap B$ und sehen $x \in X \cup (A \cap B)$.

Aufgabe G3 (Formale Definition eines geordneten Paares)

Für Elemente x und y definieren wir $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Machen Sie sich klar, dass diese formale Definition der natürlichen Vorstellung eines geordneten Paares entspricht.

Lösung: Wir setzen $M := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Besteht M aus nur einem Element, gilt also $\{x\} = \{x, y\}$, so muss $x = y$ gelten und wir ordnen M anschaulich das Paar (x, x) zu. Besteht M hingegen aus zwei Elementen, gilt also $\{x\} \neq \{x, y\}$ so muss $x \neq y$ gelten und wir ordnen M anschaulich das Paar (x, y) zu, wobei x genau das Element aus der einelementigen Menge von M ist. Isofern lässt sich y als das zweite Element aus der zweielementigen Menge rekonstruieren.