

## 4. Übungsblatt zur „Analysis I“

### Gruppenübungen

#### Aufgabe G1 (Induktion mit Abschätzung)

- (a) Finden Sie mit Induktion die Menge aller  $n \in \mathbb{N}$  mit  $3n^2 - 2 \leq 2^n$ .
- (b) Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt  $2n + 1 \leq n^2$ .
- (c) Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 4$  gilt  $2^n < n!$ .

#### Lösung:

- (a) Für  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  gilt  $3n^2 - 2 = 1, 10, 25, 46, 73, 106, 145, 190$  und  $2^n = 1, 2, 4, 16, 32, 64, 128, 256$ . Die Aussage gilt also für  $n = 1, 8$  und nicht für  $1 < n < 8$ . Wir zeigen durch Induktion, dass sie für  $n \geq 8$  gilt. Der Induktionsanfang ist bereits gemacht.

Sei also  $n \geq 8$  mit  $3n^2 - 2 \leq 2^n$ . Dann folgt aus der Binomischen Formel

$$3(n+1)^2 - 2 = (3n^2 - 2) + 3(2n+1) \leq 2^n + 3(2n+1).$$

Können wir  $3(2n+1) \leq 2^n$  für alle  $n \geq 8$  nachweisen, so sind wir fertig, da  $2^{n+1} = 2^n + 2^n$  gilt.

Wir zeigen nun per Induktion, dass  $6n + 3 \leq 2^n$  für alle  $n \geq 8$  gilt. Für  $n = 8$  gilt  $6n + 3 = 51 < 256 = 2^n$ . Sei nun  $n \geq 8$  und es gelte  $2^n \geq 6n + 3$ . Dann gilt  $6(n+1) + 3 = 6n + 3 + 6 \leq 2^n + 6$ . Die Behauptung ist bewiesen, denn  $2^n \cdot 2^8 = 256 > 6$  für  $n \geq 8$ .

- (b) Induktionsanfang (IA): Es gilt  $2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 9 = 3^2$ . Damit gilt die Aussage für  $n = 3$ .

Induktionsvorschrift (IV): Für ein festes  $n \geq 3$  gelte  $2n + 1 \leq n^2$ .

Induktionsschritt (IS): Wir müssen  $2(n+1) + 1 \leq (n+1)^2$  zeigen. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} 2(n+1) + 1 &= 2n + 2 + 1 = (2n+1) + 2 \underbrace{\leq}_{IV} n^2 + 2 \\ &= n^2 + 1 + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

- (c) IA: Es gilt  $2^4 = 16 < 24 = 4!$

IV: Für ein festes  $n \geq 4$  gelte  $2^n < n!$ .

IS: Es gilt:  $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underbrace{<}_{IV} 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!$

**Aufgabe G2** (Monotonie der  $n$ -ten Potenz)

Sei  $K$  ein angeordneter Körper und seien  $x, y \in K$  mit  $0 < x < y$ . Zeigen Sie (durch Induktion): Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $0 < x^n < y^n$ .

**Lösung:** IA: Für  $n = 1$  ist die Aussage qua Voraussetzung gegeben.

IS: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 < x^n < y^n$ . Dann folgt (da  $x > 0$ )  $0 = 0 \cdot x < x^n \cdot x = x^{n+1}$  und  $x^{n+1} = x \cdot x^n < x \cdot y^n$ . Da nun  $y^n > 0$ , folgt aus  $x < y : x \cdot y^n < y \cdot y^n = y^{n+1}$ . Insgesamt gilt  $0 < x^{n+1} < y^{n+1}$ , also die Behauptung.

**Aufgabe G3** (Ungleichung vom arithmetischen Mittel)

Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Zeigen Sie:

- (a) Mit  $2 := 1 + 1$  gilt  $0 < \frac{1}{2} < 1$ .
- (b) Für alle  $x, y \in K, x < y$ , gilt  $x < \frac{x+y}{2} < y$ .

**Lösung:**

- (a) Satz II.2.4. aus dem Skript besagt  $1 > 0$ . Wir folgern  $2 = 1 + 1 > 0$ . Aus Satz II.2.4.iii folgern wir  $\frac{1}{2} > 0$ .  
Angenommen es gilt  $(1 - \frac{1}{2}) \leq 0$ , dann könnten wir  $1 = 2 - 1 = (1 - \frac{1}{2}) \cdot 2 < 0$  folgern. Dies wäre ein Widerspruch zu  $1 > 0$ .
- (b) Es gilt  $\frac{y}{2} > \frac{x}{2} = x - \frac{x}{2}$  wir folgern  $x < \frac{y+x}{2}$ . Auf der anderen Seite gilt  $\frac{x}{2} < \frac{y}{2} = y - \frac{y}{2}$ .  
Wir folgern  $\frac{y+x}{2} < y$ .