Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
28.11.2013

7. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Die diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Wir definieren

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist. Man nennt, d die *diskrete Metrik* auf X.

(b) Zeigen Sie, dass in einem beliebigen metrischen Raum alle Mengen genau dann offen sind, wenn alle einpunktigen Menge offen sind.

(c) Zeigen Sie, dass in (X, d) alle Mengen offen und abgeschlossen sind.

(d) Wir statten die Menge $M := \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ mit der Metrik aus die von $\mathbb{R}$ kommt. Wir betrachten also die Metrik $d(x,y) = |x - y|$. Zeigen Sie dass auch in (M, d) alle Mengen offen und abgeschlossen sind, aber d nicht die diskrete Metrik ist.

Lösung:

(a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ist klar. Ebenso ist ist $d(x,y) = d(y,x)$ klar. Ist $x = y$, so gilt $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(y,z)$. Für $x \neq y$ gilt $z \neq x$ oder $z \neq y$. Wir erhalten also $d(x,y) = 1 \leq d(z,x) + d(z,y)$.

(b) Sind in einem metrischen Raum alle Mengen offen, so sind natürlich auch die einpunktigen Mengen offen. Seien nun in einem beliebigen metrischen Raum (Y, d) alle einpunktigen Mengen offen und $M \subseteq Y$ eine Menge. Es gilt $M = \bigcup_{x \in M} \{x\}$. Da aber $\{x\}$ für $x \in M$ offen ist und beliebige Vereinigungen von offenen Mengen offen sind, so ist M offen.

(c) Die Menge $B_1^X(x)$ ist offen für alle $x \in X$, es gilt aber $B_1^X(x) = \{x\}$, also sind alle einpunktigen Mengen offen. Es sind nach (c) also alle Mengen offen. Natürlich sind, dann auch alle Mengen abgeschlossen, da ja auch alle Komplemente offen sind.

(d) Sei $\frac{1}{n} \in M$. Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Die Menge $B_\varepsilon(\frac{1}{n})$ ist offen. Es gilt zudem $B_\varepsilon(\frac{1}{n}) = \{\frac{1}{n}\}$, denn ist $m \geq n + 1$, so gilt $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$ und ist $m \leq n - 1$, so erhalten wir $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n^2-n} = \frac{1}{n^2-n} \geq \frac{1}{n^2+n} = \frac{n+1-n}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \varepsilon$. Offensichtlich ist d nicht die diskrete Metrik.

Aufgabe G2 (Umgedrehte Dreiecksungleichung)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d), die umgedrehte Dreiecksungleichung gilt, d.h. zeigen Sie:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

für alle $x, y, z \in X$.

Lösung: Nach Dreiecksungleichung gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$. Wir folgern $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$.

Aus der Dreiecksungleichung folgt aber auch $d(y,z) \leq d(x,y) + d(z,x)$ also $-(d(x,y) - d(y,z)) = d(y,z) - d(x,y) \leq d(z,x)$.

Zusammen erhalten wir also die Aussage.

Aufgabe G3 (Offene und abgeschlossene Mengen)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen offen bzw. abgeschlossen sind:

$$[a,b],]a,b], [a,b[,]a,b[.$$

Achtung, a priori ist nicht ausgeschlossen, dass eine Menge sowohl offen als auch abgeschlossen ist!

Lösung: Es gilt $]a,b[= B_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$. Das offenen Intervall ist also offen. Es ist aber nicht abgeschlossen, denn für alle $\varepsilon > 0$ ist $x = \max(b - \varepsilon, \frac{a+b}{2}) \in]a,b[\cap B_\varepsilon(b)$ obwohl $b \in \mathbb{R} \setminus]a,b[$ ist.

Mit dem gleichen Argument sind $]a,b]$ und $[a,b[$ nicht abgeschlossen.

Es gilt $\mathbb{R} \setminus [a,b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[= \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]a-k, a[\cup]b, b+k[$, welches als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist. Also ist $[a,b]$ abgeschlossen. Da für jedes $\varepsilon > 0$ gitl $a - \frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(a) \setminus [a,b]$, ist $[a,b]$ nicht offen.