Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
28.11.2013

11. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Wurzel- bzw. Quotientenkriterium)

Zeigen Sie mit dem Wurzel- bzw. Quotientenkriterium, dass die Reihen

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n \qquad \text{(b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$$

konvergieren.

Lösung:

(a) Wir erhalten

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n} = \frac{n^2+n+1}{2n^2+3} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt die absolute Konvergenz der Reihe.

(b) Es gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe absolut konvergiert.

Aufgabe G2 (Trigonometrie)

In der Vorlesung wurde mit Hilfe der Additionstheoreme eine Darstellung für $\sin(2x)$ hergeleitet, wobei $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine analoge Darstellung für $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$.

Lösung: Aus den Additionstheoremen folgt

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\cos(x)\sin(x) \text{ und}$$
$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Wir folgern

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(x+2x) = \cos(x)\sin(2x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= 2\cos^2(x)\sin(x) + \sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x). \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\ &= \cos^3(x) - \cos(x)\sin^2(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x). \end{aligned}$$

Aufgabe G3 (Potenzreihen)

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot z^{2n+1}$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ habe den Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass auch $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^n$ den Konvergenzradius R hat.

Lösung:

(a) Wir setzen $a_{2n} := 0$ und $a_{2n+1} := \frac{(-1)^n}{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = 0$ und $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{1}{\sqrt[2n+1]{|2n+1|}}$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgern wir $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Der Konvergenzradius ist also 1.

(b) Sei $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|n_k \cdot a_{n_k}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$. Es folgt, die Aussage.