Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
31.01.2013

# 14. Übungsblatt zur „Analysis I“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G1** (Einige Ableitungen)
Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x^3+5)$ (b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x$ für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$ (d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3x-1}{x^2+1}$

(e) $f_5\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$ (f) $f_6\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^x)^x$

(g) $f_7\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{(x^x)}$ (h) $f_8\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$

(i) $f_9\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\ln(1+x))$ (j) $f_{10}\colon ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x^{\frac{3}{5}} + \sin^3(\frac{1}{x})}$ .

**Lösung:**

(a) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_1(x) = \exp(x^3+5) \cdot (3x^2).$$

(b) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_2(x) = \frac{d}{dx} \exp(x \cdot \ln(a)) = \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot x^a.$$

(c) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_3(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}.$$

(d) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_4(x) = \frac{d}{dx}\left((3x-1) \cdot \frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{3}{x^2+1} - (3x-1) \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot (2x) = \frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}$$

(e) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_5(x) = \frac{d}{dx} \exp(x \cdot \ln(x)) = \exp(x \cdot \ln(x)) \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln(x) \cdot x^x + x^x.$$

(f) Es gilt

$$\begin{aligned} &f_6(x) = f_5(x)^x = \exp(x \cdot \ln(f_5(x))) = \exp(x^2 \cdot \ln(x)) \\ \Rightarrow &\frac{d}{dx} f_6(x) = \exp(x^2 \cdot \ln(x)) \cdot \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = (2\ln(x) + 1) \cdot x^{x^2+1}. \end{aligned}$$

(g) Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} f_7(x) = \frac{d}{dx} (\exp(f_5(x) \cdot \ln(x)) = f_7(x) \cdot \left(f_5'(x) \cdot \ln(x) + f_5(x) \cdot \frac{1}{x}\right) \\ =&x^{(x^x)} \cdot \left(\ln(x)^2 \cdot x^x + x^x \cdot \ln(x) + x^{x-1}\right) = x^{x^x+x-1} \cdot \left(\ln(x)^2 x + x\ln(x) + 1\right) \end{aligned}$$

(h) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_8(x) = \exp(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)$$

(i) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_9(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x}$$

(j) Es gilt

$$\frac{d}{dx} f_{10}(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x^{\frac{3}{5}} + \sin^3(\frac{1}{x}))^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} - 3\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}\right)$$

**Aufgabe G2** (Ableitung einer Umkehrfunktion)

(a) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin(x)$ differenzierbar ist mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist $f$ streng monoton wachsend.
(b) Es ist $f(0) = 0$. Berechnen Sie nun $(f^{-1})'(0)$.

**Lösung:**

(a) Es gilt $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(b) Mit dem Satz über die Umkehrfunktion erhalten wir $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

**Aufgabe G3** (Differenzierbarkeit eines Produkts)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in I$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f$ in $x_0$ differenzierbar mit $f(x_0) = 0$ und $g$ in $x_0$ stetig, so ist $f \cdot g$ in $x_0$ differenzierbar mit $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0)$.
(b) Ist $f$ in $x_0$ stetig mit $f(x_0) \neq 0$, so gibt es $\delta > 0$ mit $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subseteq I$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
(c) Sind $f$ und $f \cdot g$ in $x_0$ differenzierbar und ist $f(x_0) \neq 0$, so ist $g$ in $x_0$ differenzierbar.

**Lösung:**

(a) Wir rechnen

$$\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x)}{x - x_0} = g(x_0)\cdot\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen $g(x_0)\cdot f'(x_0)$ für $x \to x_0$.

(b) Sei $\varepsilon := f(x_0)$. Da $f$ in $x_0$ stetig ist gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) \in B_\varepsilon(f(x))$ für alle $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Insbesondere gilt für diese $x$ also $f(x) \neq 0$.

(c) Auf dem Intervall $x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ist $\frac{1}{f}$ definiert und nach Kettenregel in $x_0$ differenzierbar. Auch $g$ ist in $x_0$ differenzierbar. Mit der Produktregel folgt, dass $f \cdot \frac{g}{f} = g$ in $x_0$ differenzierbar ist.