Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2013/2014
24.10.2013

2. Übungsblatt zur „Analysis I“

Wichtig: Bitte geben Sie die Hausübungen in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Rechnen mit Mengen)

Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A \cap B = A$
(ii) $A \subseteq B$
(iii) $A \cup B = B$.

Hinweis: Weisen Sie die Äquivalenz durch einen Ringschluss nach, d.h., beweisen Sie (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i)

Lösung: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $a \in A$, dann folgt aus (i) $a \in A \cap B$. Hieraus erhalten wir $a \in B$. Da $a \in A$ beliebig war folgern wir $A \subseteq B$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Um die Gleichheit in (iii) nachzuweisen, zeigen wir als erstes $A \cup B \subseteq B$. Sei dazu $x \in A \cup B$. Im Falle $x \in B$ sind wir fertig. Im Falle $x \in A$ folgt mit (ii), $x \in B$. In beiden Fällen gilt also $x \in B$. Da x beliebig war folgt die Aussage. Nun zeigen wir $B \subseteq A \cup B$. Dies ist aber klar nach Definition der Vereinigung

(iii) $\Rightarrow$ (i): Die Inklusion $A \cap B \subseteq A$ ist klar. Wir müssen also nur $A \subseteq A \cap B$ zeigen. Sei hierzu $x \in A$. Mit (iii) gilt $x \in A \cup B = B$. Da also x ein Element von A und von B ist folgt $x \in A \cap B$.

Aufgabe G2 (De Morgansche Regeln für Mengen und Ausmultiplizieren von Mengen)

Seien X, A, B Mengen. Zeigen Sie:

(a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
(b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
(c) $X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$
(d) $X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B)$.

Lösung:

(a) Wir zeigen $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Zunächst machen wir uns “$\subseteq$ ”klar. Dazu sei $x \in X \setminus (A \cap B)$. Wir wissen also, dass $x \in X$ und $x \notin A \cap B$. Um zu zeigen, dass x in der rechten Seite liegt, machen wir eine Fallunterscheidung.
1.Fall $x \in A$. In diesem Fall muss $x \notin B$ gelten, da sonst $x \in (A \cap B$ folgen würde, dies wäre aber ein Widerspruch. Mit $x \in X$ erhalten wir also $x \in X \setminus B$. Insbesondere folgt $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

2. Fall $x \notin A$. In diesem Fall folgt mit $x \in X$ direkt $x \in X \setminus A$. Damit sehen wir, dass auch in diesem Fall x in der rechten Seite enthalten ist.
Nun machen wir uns "$\supseteq$"klar. Sei dazu $x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in X \setminus A$. Wir folgern $x \in X$ und $x \notin A$. Insbesondere erhalten wir $x \notin A \cap B$. Wir sehen, $x \in X \setminus (A \cap B)$.
2. Fall $x \in X \setminus B$. Hier argumentieren wir analog zu Fall 1. und erhalten $x \in X \setminus (A \cap B)$.

(b) Wir zeigen $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
Zunächst zeigen wir "$\subseteq$". Sei $x \in X \setminus (A \cup B)$. Wir erhalten $x \in X$ und $x \notin A \cup B$. Aus $x \notin A \cup B$ folgern wir $x \notin A$ sowie $x \notin B$. Mit $x \in X$ und $x \notin A$ erhalten wir also $x \in X \setminus A$. Mit $x \in X$ und $x \notin B$ erhalten wir $x \in X \setminus A$. Insgesammt erhalten wir also $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
Jetzt machen wir uns "$\supseteq$"klar. Sei dazu $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Wir folgern $x \in X \setminus A$. Daraus folgt $x \in X$ und $x \notin A$. Desweiteren erhalten wir aus $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ auch $x \in (X \setminus B)$ und folgern hierraus $x \notin B$. Mit $x \notin A$ und $x \notin B$ folgern wir $x \notin A \cup B$. Mit $x \in X$ erhalten wir $x \in X \setminus (A \cup B)$.

(c) Wir zeigen $X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Zunächst machen wir uns "$\subseteq$"klar. Sei dazu $x \in X \cap (A \cup B)$. Dann ist $x \in X$ und $x \in A \cup B$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in A$. Dann folgt mit $x \in X$ direkt $x \in (X \cap A) \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B)$.
2. Fall $x \in B$. Wir erhalten mit $x \in X$ direkt $x \in X \cap B \subseteq (X \cap A) \cup (X \cap B)$
Nun machen wir uns "$\supseteq$"klar. Sei dazu $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in (X \cap A)$. Wir folgern $x \in X$ und $x \in A$. Hieraus erhalten wir $x \in A \cup B$ und schließen $x \in X \cap (A \cup B)$.
2. Fall $x \in (X \cap B)$. Wir argumentieren analog zu Fall 1. und erhalten $x \in X \cap (A \cup B)$.

(d) Wir zeigen $X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B)$. Zunächst zeigen wir "$\subseteq$. Sei $x \in X \cup (A \cap B)$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: $x \in X$. Dann gilt $x \in X \cup A$ und $x \in X \cup B$. Wir erhalten $x \in (X \cup A) \cap (X \cup B)$.
2. Fall: $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$. Insbesondere erhalten wir $x \in A \cup X$ und $x \in B \cup X$. Wir folgern $x \in (X \cup A) \cap (X \cup B)$.
Nun zeigen wir "$\supseteq$". Sei also $x \in x \in (X \cup A) \cap (X \cup B)$. Wir erhalten $x \in X \cup A$ und $x \in X \cup B$. Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall $x \in X$: Wir erhalten direkt $x \in X \cup (A \cap B)$.
2. Fall $x \notin X$: Aus $x \in X \cup A$ folgt direkt $x \in A$ und aus $x \in X \cup B$ folgt $x \in B$. Wir erhalten $x \in A \cap B$ und sehen $x \in X \cup (A \cap B)$.

Aufgabe G3 (Formale Definition eines geordneten Paares)

Für Elemente x und y definieren wir $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Machen Sie sich klar, dass diese formale Definition der natürlichen Vorstellung eines geordneten Paares entspricht.

Lösung: Wir setzen $M := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Besteht M aus nur einem Element, gilt also $\{x\} = \{x, y\}$, so muss $x = y$ gelten und wir ordnen M anschaulich das Paar (x, x) zu. Besteht M hingegen aus zwei Elementen, gilt also $\{x\} \neq \{x, y\}$ so muss $x \neq y$ gelten und wir ordnen M anschaulich das Paar (x, y) zu, wobei x genau das Element aus der einelementigen Menge von M ist. Isofern lässt sich y als das zweite Element aus der zweielementigen Menge rekonstruieren.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Bilder und Urbilder; 3 Punkte)

Seien X, Y Mengen, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ Teilmengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es gilt $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ und $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Lösung: Zunächst zeigen wir $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ sei dazu $y \in f(f^{-1}(B))$ dann gibt es ein $x \in f^{-1}(B) \subseteq A$ mit $y = f(x)$. Aus $x \in f^{-1}(B)$ folgt direkt $y = f(x) \in B$.

Nun zeigen wir die zweite Inklusion $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Sei dazu $x \in A$. Um $x \in f^{-1}(f(A))$ zu zeigen müssen wir $f(x) \in f(A)$ nachweisen. Dies gilt aber, da $x \in A$.

Aufgabe H2 (De Morgansche Regeln II; 5 Punkte)

Seien X, J Mengen, $J \neq \emptyset$ und $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Mengen. Zeigen Sie:

(a) $X \setminus \bigcup_{j\in J} X_j = \bigcap_{j\in J}(X \setminus X_j)$
(b) $X \setminus \bigcap_{j\in J} X_j = \bigcup_{j\in J}(X \setminus X_j)$

Lösung:

(a) Zu nächst zeigen wir "$\subseteq$": Sei $x \in X \setminus \bigcup_{j\in J} X_j$. Es folgt $x \in X$. Zudem folgt aus $x \notin \bigcup_{j\in J} X_j$, dass x in keiner der Mengen X_j enthalten ist. Um $x \in \bigcap_{j\in J}(X \setminus X_j)$ zu zeigen, wählen wir ein beliebiges $j \in J$. Es folgt mit mit dem schon gezeigten $x \in X \setminus X_j$. Da $j \in J$ beliebig war erhalten wir die gesuchte Inklusion.
Nun zeigen wir "$\supseteq$": Sei $x \in \bigcap_{j\in J}(X \setminus X_j)$. Wir folgern das $x \in X \setminus X_j$ für alle $j \in J$ erfüllt ist. Da $J \neq \emptyset$ gilt, folgt insb. $x \in X$. Um $x \in X \setminus \bigcup_{j\in J} X_j$ zu zeigen müssen wir also nur noch $x \notin \bigcup_{j\in J} X_j$ zeigen. Wir nehmen an es gäbe ein $j_0 \in J$ mit $x \in X_{j_0}$. Dies würde $x \in X \setminus X_{j_0}$ widersprechen.

(b) Zu nächst zeigen wir "$\subseteq$": Sei $x \in X \setminus \bigcap_{j\in J} X_j$. Wir folgern, dass $x \in X$ und $x \notin \bigcap_{j\in J} X_j$. Aus letzterem folgern wir die Existenz eines Index $j_0 \in J$ mit $x \notin X_{j_0}$. Wir erhalten also $x \in X \setminus X_j$. Insb. folgern wir $x \in \bigcup_{j\in J}(X \setminus X_j)$.
Nun zeigen wir "$\supseteq$": Sei $x \in \bigcup_{j\in J}(X \setminus X_j)$. Wir folgern die Existenz eines Index $j_0 \in J$ mit $x \in X \setminus X_{j_0}$. Foglich erhalten wir $x \in X$ und $x \notin X_{j_0}$. Aus letzterem erhalten wir $x \notin \bigcap_{j\in J} X_j$. Und folgern $x \in X \setminus \bigcap_{j\in J} X_j$.

Bemerkung: Analog, zu dem hier vorgestellten Beweis kann man $X \cap \bigcup_{j\in J} X_j = \bigcup_{j\in J} X \cap X_j$ und $X \cup \bigcap_{j\in J} X_j = \bigcap_{j\in J} X \cup X_j$ zeigen.

Aufgabe H3 (Operationstreue der Urbildfunktion; 5 Punkte)

Seien X, Y, J Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und für jedes $j \in J$ sei $Y_j \subseteq Y$. Für Aufgabenteil (c) seien zudem $A, B \subseteq Y$. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$
(b) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Y_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$
(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Lösung:

(a) "$\subseteq$": Sei $x \in X$ mit $f(x) \in \bigcap_{j\in J} Y_j$. Dann gilt $f(x) \in Y_j$ für alle $j \in J$. Um $\bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$ zu zeigen wählen wir ein beliebiges $j \in J$ und sehen $f(x) \in Y_j$. Wir folgern $f(x) \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$.
"$\supseteq$": Sei nun $x \in X$ mit $x \in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$. Wir müssen $f(x) \in \bigcap_{j\in J} Y_j$ zeigen. Sei dazu $j \in J$. Wir erhalten $x \in f^{-1}(Y_j)$ und folgern $f(x) \in Y_j$.

(b) "$\subseteq$": Sei $x \in X$ mit $f(x) \in \bigcup_{j\in J} Y_j$. Wir müssen zeigen, dass es ein $j \in J$ gibt mit $x \in f^{-1}(Y_j)$. Aus $f(x) \in \bigcup_{j\in J} Y_j$ folgern wir die Existenz eines $j \in J$, sodass $f(x) \in \bigcup_{j\in J} Y_j$. Dies zeigt die Behauptung.
"$\supseteq$": Sei nun $x \in X$ mit $x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$, dann gibt es ein $j \in J$ mit $x \in f^{-1}(Y_j)$. Wir folgern $f(x) \in Y_j$ und erhalten so $f(x) \in \bigcup_{j\in J} Y_j$ bzw. $x \in f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Y_j)$

(c) "$\subseteq$": Sei $x \in X$ mit $f(x) \in A \setminus B$, dann folgern wir $f(x) \in A$ und $f(x) \notin B$. Wir erhnalten $x \in f^{-1}(A)$ und $x \notin f^{-1}(B)$. Hieraus erhalten wir $x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
"$\supseteq$": Sei $x \in X$ mit $x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. Wir folgern $x \in f^{-1}(A)$ und $x \notin f^{-1}(B)$ und erhalten $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$. Weiter folgern wir $f(x) \in A \setminus B$ und erhalten $x \in f^{-1}(A \setminus B)$.

Aufgabe H4 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; 5 Punkte)

Seien $f\colon X \to Y$ und $h\colon Y \to Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann bijektiv, wenn eine Funktion $g\colon Y \to X$ existiert, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.
(b) Sind h und f injektiv, dann ist auch $h \circ f$ injektiv.
(c) Sind h und f surjektiv, dann ist auch $h \circ f$ surjektiv.

Lösung:

(a) "$\Rightarrow$ ": Sei f bijektiv. Wir definieren die Funktion $g\colon Y \to X$ wie folgt. Für $y \in Y$ gibt es genau ein $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$, weil f bijektiv ist. Wir setzten $g(y) = x_y$. Insbesondere ist g wohldefiniert. Um die Gleichung $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ einzusehen wählen wir ein $y \in Y$ und rechnen wir $f(g(y)) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_y$. Um $g \circ f = \mathrm{id}_X$ einzusehen wählen wir ein $x \in X$ und setzten $y := f(x)$. Das Element x_y ist das einzige in X mit $f(x_y) = y$, daraus erhalten wir $x_y = x$ und rechnen $g(f(x)) = g(y) = x_y = x$.
"$\Leftarrow$": Zunächst zeigen wir, dass f injektiv ist. Sei dazu $f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in X$, dann folgt durch Anwenden von g auf beide Seiten $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ und mit $g \circ f = id_X$ erhalten wir $x_1 = x_2$.
Nun zeigen wir, dass f surjektiv ist. Sei dazu $y \in Y$. Aus $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ erhalten wir $f(g(y)) = y$. Da $g(y) \in X$ haben wir ein Element aus X gefunden, dass von f auf y abgebildet wurde.

(b) Um zu zeigen, dass $h\circ f$ injektiv ist, wählen wir beliebige $x_1, x_2 \in X$ mit $h\circ f(x_1) = f(x_2)$. Da h injektiv ist folgern wir $f(x_1) = f(x_2)$ und da auch f injektiv ist erhalten wir $x_1 = x_2$.

(c) Um zu zeigen, dass $h \circ f$ surjektiv ist wählen wir ein $z \in Z$ und müssen zeigen, dass es ein $x \in X$ mit $h(f(x)) = z$ gibt. Da h surjektiv ist können wir ein $y \in Y$ mit $h(y) = z$ wählen. Da auch f surjektiv ist können wir ein $x \in X$ wählen mit

$f(x) = y$ und erhalten $h(f(x)) = h(y) = z$.