Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2013/2014

31.10.2013

3. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Abzählbarkeit; 5 Punkte)

Sei X eine abzählbare Menge. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathcal{E}_n(X) := \{M \subseteq X : \#M \leq n\}$ der maximal n-elementigen Teilmengen von X abzählbar.

(b) Die Menge $\mathcal{E}(X)$ aller endlichen Teilmengen von X ist abzählbar.

Lösung:

(a) Nach Aufgabe G3 ist $\mathbb{N}^n$ abzählbar. Es gibt also eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$, da auch X abzählbar ist gibt es zudem eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to X$, es folgt, dass die Abbildung

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}^n \xrightarrow{f\times\ldots\times f} X^n$$

surjektiv ist. Da die Abbildung $X^n \to \mathcal{E}_n(X)$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$ surjektiv ist, können wir folgern, dass $\mathcal{E}_n(X)$ abzählbar ist. Dies beendet den Beweis.

(b) Es gilt $\mathcal{E}(X) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_n(X)$. Da nach (a) jede der Mengen $\mathcal{E}_n(X)$ abzählbar ist und $\mathcal{E}(X)$ eine abzählbare Vereinigung von diesen abzälbaren Mengen ist, folgt die Aussage.

Aufgabe H2 (Induktion; 5 Punkte)

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & : n \text{ gerade} \\ -\frac{n+1}{2} & : n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Lösung: Wir zeigen die Aussage mit Induktion nach n.

IA: Ist klar.

IV: Die Aussage gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

IS: Wir zeigen die Aussage für $n + 1$. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall $(n + 1)$ ist gerade. Dann ist n ungerade. Es gilt somit

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (n + 1) = -\frac{n+1}{2} + (n + 1) = \frac{n+1}{2}.$$

2. Fall $(n+1)$ ist ungerade. Dann ist n gerade. Es gilt somit

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k - (n+1) = \frac{n}{2} - (n+1) = -\frac{(n+1)+1}{2}.$$

Aufgabe H3 (Das Zählen von Abbildungen; 5 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ sowie M eine m-elementige Menge, und N eine n-elementige Menge. Zeigen Sie (mit Induktion nach m):

(a) Es gibt n^m Abbildungen $f\colon M \to N$. Sie müssen nicht zeigen, dass es nur n verschiedene Abbildungen aus einer einelementigen Menge in eine n-elementige Menge gibt.
Bemerkung. Man schreibt N^M für die Menge der Abbildungen von M nach N. Nach obigem gilt also $\#(N^M) = (\#N)^{\#M}$ für endliche Mengen M und N.

(b) Für $n \geq m$ gibt es

$$\prod_{j=0}^{m-1}(n-j)$$

injektive Abbildungen von M nach N.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Aussage sogar für $m \in \mathbb{N}_0$.
IA: Ist $m = 0$, so ist $M = \emptyset$ und es gibt nur eine Abbildung, nämlich die leere. Da $n^0 = 1$ ist, folgt der Induktionsanfang.
IV: Für festes m gelte, dass es genau n^m Abbildungen von M nach N gibt.
IS: Sei nun M eine $m{+}1$-elementige Menge und $x_0 \in M$. Wir setzten $P := M \setminus \{x_0\}$. Da P genau m Elemente enthält folgt mit der Induktionsvorschrift dass $\{f\colon P \to N : f \text{ ist Abbildung}\}$ genau n^m Elemente besitzt. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi\colon \{f\colon M \to N : f \text{ ist Abbildung}\} &\to \{g\colon P \to N : g \text{ ist Abbildung}\} \times N,\\ f &\mapsto (f|_P, f(x_0)).\end{aligned}$$

Können wir zeigen, dass Φ bijektiv ist, so sind wir fertig. Seien $f_1, f_2 \in \{f\colon M \to N : f \text{ ist Abbildung}\}$. Aus $f_1|_P = f_2|_P$, $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ und $M = P \cup \{x_0\}$ folgt $f_1 = f_2$ also ist Φ injektiv. Auch die Surjektiv ist leicht zu sehen. Seien $g \in \{g\colon M \to N : g \text{ ist Abbildung}\}$ und $y \in N$. Wir definieren

$$f\colon M \to N, f(x) = \begin{cases} g(x) & : x \in P \\ y & : x = x_0. \end{cases}$$

Aus $\Phi(f) = (g, y)$ folgt die Surjektivität.

(b) Wir zeigen zunächst einen Hilfssatz.

Lemma. *Seien X eine Menge mit $\#X = m$, Y eine Menge und $Z \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge. Wir definieren die Projektion* $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$. *Gilt* $\# \mathrm{pr}_1^{-1}(\{x\}) \cap Z = n$ *für alle* $x \in X$, *so folgt* $\#Z = n \cdot m$.
Der Beweis ist einfach. Es gilt nämlich

$$Z = \dot{\bigcup_{x \in X}} \mathrm{pr}_1^{-1}(\{x\}).$$

Hieraus folgt die Behauptung.
Nun zur eigentlichen Aufgabe. Wir führen einen Induktionsbeweis.
IA: Ist $m = 0$ so ist die einzige Abbildung zwischen M und N die leere Abbildung. Diese ist injektiv.
IV: Für festes m gebe es genau $\prod_{j=0}^{m-1}(n-j)$ injektive Abbildungen von M nach N.
IS: Sei $x_0 \in M$ wir schreiben $P := M \setminus \{x_0\}$. Zudem schreiben wir $\mathcal{A} := \{f \colon M \to N : \ f \text{ injektive}\}$ und $\mathcal{B} := \{g \colon P \to N : \ g \text{ injektive}\}$ Wir Wir definieren die Abbildung

$$\Phi \colon \mathcal{A} \to \{(g, y) \in \mathcal{B} \times N : y \in N \setminus g(P)\}, f \mapsto (f|_P, f(x_0))$$

Mit obigem Lemma sehen wir, dass die Mächtigkeit der rechten Menge gleich $\#\mathcal{B} \cdot (n-m)$ ist. Nach Induktionsvorschrift hat sie also die Mächtigkeit $\prod_{j=0}^{m}(n-j)$.
Können wir zeigen, dass Φ bijektiv ist, so sind wir fertig. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ mit $f_1|_P = f_2|_P$ und $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ dann folgt $f_1 = f_2$ aus $M = P \cup \{x_0\}$ dies zeigt die Injektivität. Nun zeigen wir, dass Φ surjektiv ist. Sind $g \in \mathcal{B}$ und $y \in N \setminus g(P)$, dann definieren wir

$$f \colon M \to N, f(x) = \begin{cases} g(x) & : x \in P \\ y & : x = x_0. \end{cases}$$

Um $f \in \mathcal{B}$ zu sehen müssen wir zeigen, dass die Abbildung f injektiv ist. Seien dazu $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Um $x_1 = x_2$ einzusehen machen wir eine Fallunterscheidung:
1. Fall: $x_1, x_2 \in P$. Dann folgt $x_1 = x_2$ aus $g(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = g(x_2)$ und der Injektivität von g.
2. Fall: Es existiert $i \in \{1, 2\}$, sodass $x_i = x_0$. O.B.d.A. nehmen wir $x_1 = x_0$ an, dann gilt $f(x_1) = y = f(x_2)$. Da nun aber $f(x) \neq y$ für alle $x \in P$ gilt, folgt $x_2 = x_0$ und somit $x_1 = x_2$. Offensichtlich gilt $\Phi(f) = (g, y)$. Es folgt die Bijektivität von Φ.