

5. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Iterierte Suprema; 5 Punkte)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper. Ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus K , so schreiben wir $\sup_{i \in I} a_i := \sup\{a_i : i \in I\}$. Seien nun $I, J \neq \emptyset$ Mengen und $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familie von Elementen aus K mit $\sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} < \infty$. Zeigen Sie:

- (a) $\sup_{j \in J} a_{i_0,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$ für alle $i_0 \in I$
- (b) $\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$
- (c) $a_{i_0,j_0} \leq \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j}$ für alle $i_0 \in I$ und $j_0 \in J$
- (d) $\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j} = \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$.

Lösung:

- (a) Sei $i_0 \in I$ für alle $j \in J$ gilt $a_{i_0,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$. Durch Übergang zum Supremum in j erhalten wir $\sup_{j \in J} a_{i_0,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$.
- (b) Da $i_0 \in I$ in (a) beliebig war, können wir über $i \in I$ das Supremum bilden und erhalten $\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$.
- (c) Es gilt $a_{i_0,j_0} \leq \sup_{j \in J} a_{i_0,j} \leq \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j}$.
- (d) Da in (c) $i_0 \in I$ und $j_0 \in J$ beliebig waren können wir das Supremum über $(i,j) \in I \times J$ bilden und erhalten $\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j} = \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$.

Aufgabe H2 (Einbettung von $\mathbb{Z}$; 5 Punkte)

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper. In der Vorlesung wurde die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow K$, $z \mapsto z \cdot 1$ definiert. Hierbei haben wir $0 \cdot x := 0$ für $x \in K$ und $0 \in \mathbb{Z}$ definiert sowie rekursiv $n \cdot x := (n-1) \cdot x + x$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n < 0$ haben wir $n \cdot x := -((-n) \cdot x)$ definiert.

- (a) Zeigen Sie $(n \cdot 1)x = n \cdot x$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $x \in K$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Fall $n \in \mathbb{N}_0$ per Induktion.)
- (b) Zeigen Sie nun $(n \cdot 1)(m \cdot 1) = (nm) \cdot 1$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Lösung:

- (a) Wir zeigen die Aussage zunächst für $n \geq 0$ durch Induktion.

IA: Es gilt $(0 \cdot 1)x = 0x = 0 \cdot x$ für $x \in K$.

IS: Es gelte $((n-1) \cdot 1)x = (n-1) \cdot x$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir rechnen

$$(n \cdot 1)x = ((n-1) \cdot 1 + 1)x = ((n-1) \cdot 1)x + x \stackrel{IV}{=} (n-1) \cdot x + x = n \cdot x.$$

Für $n < 0$ rechnen wir $n \cdot x = -((-n) \cdot x) = -(((n-1) \cdot 1)x) = (n \cdot 1)x$.

- (b) Es gilt mit Hilfe von (a) $(n \cdot 1)(m \cdot 1) = n \cdot (m \cdot 1) = (nm) \cdot 1$, wobei die letzte der Gleichheiten aus der Vorlesung folgt.

Aufgabe H3 (Rechenregeln für das Supremum; 5 Punkte)

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper, $N, M \subseteq K$. Zeigen Sie:

- (a) Wenn $\sup M$ und $\sup N$ in K existieren, dann existiert auch $\sup(M + N)$ in K und es gilt $\sup(M + N) = \sup(M) + \sup(N)$.
 (b) Wenn $\sup M$ und $\sup N$ in K existieren und $N, M \geq 0$ gilt, dann existiert auch $\sup(M \cdot N)$ in K und es gilt $\sup(M \cdot N) = \sup(M) \cdot \sup(N)$.

Lösung:

- (a) Die Menge $M + N$ ist nach oben beschränkt, denn es gilt offensichtlich $M + N \leq \sup M + \sup N$. Wir müssen zeigen, dass $\sup M + \sup N$ die kleinste obere Schranke für $M + N$ ist. Sei $M + N \leq x$ für $x \in K$. Seien $m \in M$ fest. Für alle $n \in N$, gilt dann $m + n \leq x$, also auch $n \leq x - m$ (es gilt also $N \leq x - m$). Durch Übergang zum Supremum erhalten wir $\sup N \leq x - m$, bzw. $m \leq x - \sup N$. Da $m \in M$ beliebig war können wir zum Supremum übergehen (es gilt ja $M \leq x - \sup N$) und erhalten $\sup M \leq x - \sup N$. Wir erhalten also $\sup M + \sup N \leq x$.
 (b) Wir können o.B.d.A. $N, M \neq \{0\}$ annehmen. Es gelten also $\sup M = \sup M \setminus \{0\}$, $\sup N = \sup N \setminus \{0\}$ und $\sup M \cdot N = \sup M \setminus \{0\} \cdot N \setminus \{0\}$ weshalb wir $N, M > 0$ annehmen können. Die Aussage lässt sich nun, durch Vertauschen der additiven mit den multiplikativen Zeichen, genau so zeigen wie in (a).

Aufgabe H4 (Ein Intervall; 5 Punkte)

Wir definieren die Menge $I := \{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 < 2\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass I in $\mathbb{Q}$ ein beschränktes Intervall ist.
 (b) Zeigen Sie, dass I nicht von der Form $]0, a]$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ ist.
 (c) Zeigen Sie, dass I nicht von der Form $]0, a[$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ ist. Sie dürfen verwenden, dass es kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$ gibt.

Sie müssen für diese Aufgabe nicht zeigen, dass in $\mathbb{Q}$ der Satz des Archimedes gilt. (Hinweis: Machen Sie sich klar, dass es für $p, q \in \mathbb{Q}_+$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{n} \cdot q < p$)

Lösung:

- (a) I ist nach unten durch 0 beschränkt. I ist nach oben durch 2 beschränkt, denn für $x \in I$ gilt $x^2 < 2 \leq 2 \cdot 2$. Es folgt also $x \leq 2$.
 Seien nun $x, z \in I$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $x \leq y \leq z$. $y \in \mathbb{Q}_+$ folgt direkt. Aus $y \leq z$ und $y, z > 0$ folgt damit also $y \cdot y \leq z \cdot y \leq z \cdot z$.
 (b) Angenommen es gilt $I =]0, a]$ für ein $a = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$. Es gilt also $a^2 < 2$ und wir können $b, c > 0$ annehmen. Wir definieren $\varepsilon := 2 - \frac{b^2}{c^2}$. Es gilt $\varepsilon > 0$. Da in $\mathbb{Q}$ der Satz des Archimedes gilt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \cdot \frac{2b}{c^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $1n^2 \cdot \frac{1}{c^2} \leq 1n \cdot \frac{1}{c^2}$. Wir setzen $\delta := \frac{1}{n}$ und erhalten

$$\frac{(b + \delta)^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2\delta b}{c^2} + \frac{\delta^2}{c^2} < \frac{b^2}{c^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < 2.$$

Es gilt $\frac{b+\delta}{c} > a$ und $\frac{b+\delta}{c} \in I$. Dies ist ein Widerspruch.

- (c) Angenommen es gilt $I =]0, a[$ für ein $a = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$. Wir wollen zeigen, dass dann $a^2 = 2$ gelten muss. Angenommen es würde $a^2 < 2$ gelten. In diesem Fall argumentieren wir genau so wie in (b). Angenommen es gilt $a^2 > 2$. Wir definieren $\varepsilon := \frac{b^2}{c^2} - 2 > 0$ und wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$, $\frac{1}{n} \cdot \frac{2b}{c^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{c^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir definieren $\delta := \frac{1}{n}$ und rechnen

$$\frac{(b - \delta)^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} - \frac{2\delta b}{c^2} + \frac{\delta^2}{c^2} > \frac{b^2}{c^2} - \frac{2\delta b}{c^2} - \frac{\delta^2}{c^2} > \frac{b^2}{c^2} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2.$$

Aus $\delta < b$ folgt $\frac{b-\delta}{c} > 0$. Zudem gilt $\frac{b-\delta}{c} < a$. Aber nach obigem gilt nicht $\frac{b-\delta}{c} \in I$. Dies ist ein Widerspruch.

Es muss also $a^2 = 2$ gelten. Das kann aber nicht sein, da $a \in \mathbb{Q}$.