

7. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Eine Ungleichung; 5 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{C}$, zeigen Sie

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{|a|+1} + \frac{|b|}{|b|+1}$$

Lösung: Ist eines der beiden Elemente a, b gleich 0, so ist die Aussage trivial, wir können also o.B.d.A. $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ annehmen. Die Aussage ist für $a+b=0$ auch trivial, sodass wir auch o.B.d.A. $a+b \neq 0$ annehmen.

Für ein $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Wir folgern mit der Dreiecksungleichung

$$\left(\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{|a+b|} \geq 1 + \frac{1}{|a|+|b|} = \frac{|a|+|b|+1}{|a|+|b|}$$

Durch Invertieren auf beiden Seiten dreht sich die Ungleichung um. Wir erhalten also

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{|a|+|b|+1} = \frac{|a|}{|a|+1+|b|} + \frac{|b|}{|b|+1+|a|} \leq \frac{|a|}{|a|+1} + \frac{|b|}{|b|+1}$$

Aufgabe H2 (Die französische Eisenbahnmetrik; 5 Punkte)

Seien $X \neq \emptyset, x_0 \in X$ und $f: X \rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x_0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \neq x_0$. Setze

$$d_{SNCF}(x, y) = \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X, d_{SNCF}) ein metrischer Raum ist. (Interpretiert man x_0 als Paris und $f(x)$ als die Entfernung von x nach Paris, so entspricht $d_{SNCF}(x, y)$ der auf dem französischen Eisenbahnnetz von x nach y zurückzulegenden Strecke, wie böse Zungen behaupten.)

Lösung: (M1) Für $x = y$ gilt $d_{SNCF}(x, y) = 0$. Für $x \neq y$ ist mindestens eines der beiden Elemente x und y von x_0 verschieden, also $d_{SNCF}(x, y) = f(x) + f(y) \geq \max(f(x), f(y)) > 0$.

(M2) Ist $x = y$ so gilt $d_{SNCF}(x, y) = 0 = d_{SNCF}(y, x)$. Ist $x \neq y$ so gilt $d_{SNCF}(x, y) = f(x) + f(y) = f(y) + f(x) = d_{SNCF}(y, x)$.

(M3) Seien $x, y, z \in X$. 1. Fall $z \neq x$ und $z \neq y$: Da f positiv ist, gilt $d_{SNCF}(x, y) \leq f(x) + f(y) \leq f(x) + f(z) + f(z) + f(y) = d_{SNCF}(x, z) + d_{SNCF}(z, y)$.

2. Fall $x = z$ oder $y = z$. Wir nehmen o.B.d.A. $x = z$ an. Es gilt $d_{SNCF}(x, y) = d_{SNCF}(x, x) + d_{SNCF}(x, y) = d_{SNCF}(x, z) + d_{SNCF}(z, y)$. Ist $y = z$ argumentiert man analog.

Aufgabe H3 (Abgeschlossene Kugeln; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) jede der Mengen $\{x \in X : d(x, p) \leq r\}$ für $p \in X$ und $r \in \mathbb{R}$, abgeschlossen ist.

Lösung: Sei $A := \{x \in X : d(x, p) \leq r\}$. Wir zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Sei $y \in X \setminus A$. Dann ist $d(y, p) > r$, also $\varepsilon := d(y, p) - r > 0$. Es gilt $B_\varepsilon(y) \subset X \setminus A$, denn ist $z \in B_\varepsilon(y)$, so ist $d(z, y) < \varepsilon$. Es folgt mit der umgedrehten Dreiecksungleichung $d(z, p) \geq d(p, y) - d(z, y) > d(p, y) - \varepsilon = r$.

Aufgabe H4 (Offene und abgeschlossene Mengen II; 5 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ bzgl. der normalen Metrik offen bzw. abgeschlossen sind. Skizzieren Sie zudem grob M_1 und M_2 .

- (a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
- (b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ und } |z| \leq 1\}$
- (c) $M_3 := \mathbb{Q} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$

Lösung:

- (a) Wir schreiben $A := \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}$. Nach 3 ist A abgeschlossen und somit $\mathbb{C} \setminus A$ offen. Es gilt $M_1 = B_2(0) \setminus A = B_2(0) \cap (\mathbb{C} \setminus A)$. Da $B_2(0)$ nach Vorlesung offen ist und endliche Schnitte von offenen Mengen offen sind, ist auch M_1 offen.
- (b) Wir betrachten die Menge $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Diese Menge ist offen, denn wenn $z = a + ib \in U$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist $a < 0$. Sei $\varepsilon := -a > 0$. Es gilt $B_\varepsilon(z) \subseteq U$, denn sei $w = x + iy \in B_\varepsilon(z)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$|a - x| \leq \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = |z - w| < \varepsilon.$$

Also erhalten wir $x - a < \varepsilon$ und somit $x < \varepsilon + a = 0$. Mit $x = \operatorname{Re}(w) < 0$ sehen wir $B_\varepsilon(z) \subseteq U$.

Da nun U offen ist, ist $B := \mathbb{C} \setminus U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ abgeschlossen. Es gilt aber $M_2 = B \cap A$, wobei A wie in Teil (a) gewählt wird. M_2 ist als Schnitt abgeschlossener Mengen also abgeschlossen.

- (c) M_3 ist nicht offen, denn $0 \in M_3$ und es liegt keine Kugel $B_\varepsilon(0)$ vollständig in M_3 , denn sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist auch $\frac{x}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und wir können n so klein wählen, dass $\frac{x}{n} \in B_\varepsilon(0)$ gilt, es ist aber $\frac{x}{n} \notin M_3$.
- M_3 ist aber auch nicht abgeschlossen, da $\mathbb{C} \setminus M_3$ nicht offen ist, da $x := \sqrt{2} \in \mathbb{C} \setminus M_3$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, nach dem archimedischen Prinzip.