

12. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (ε - δ -Kriterium)

Wir betrachten die Abbildung $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums, dass f in 0 stetig ist.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums, dass f in jedem $x > 0$ stetig ist. **Hinweis:** Gegeben x und ε erhält man ein mögliches δ durch $\varepsilon \cdot \sqrt{x}$.

Lösung:

- (a) Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \varepsilon^2$. Für $y \in B_\delta(x)$ mit $y > 0$ rechnen wir

$$|\sqrt{y} - 0| = \sqrt{y} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

- (b) Seien $\varepsilon > 0$ und $x > 0$. Wir definieren $\delta := \varepsilon \cdot \sqrt{x}$. Sei $y \in B_\delta(x)$. Wir erhalten

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \cdot \sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{|y - x|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{|y - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}} = \varepsilon.$$

Aufgabe H2 (Klebelemma)

Seien X und Y metrische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (a) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X , sodass $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f|_{U_i}$ für alle $i \in I$ stetig ist.
- (b) Seien A und B abgeschlossene Teilmengen von X , sodass $A \cup B = X$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind.

Die Aussagen in (a) und (b) gelten auch, wenn X und Y beliebige topologische Räume sind.

Lösung:

- (a) Nach Vorlesung ist $f|_{U_i}$ für alle $i \in I$ stetig, wenn f stetig ist. Sei nun $f|_{U_i}$ für alle $i \in I$ stetig. Sei $V \subseteq Y$ offen. Wir rechnen

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V) \cap U_i = \bigcup_{i \in I} f|_{U_i}^{-1}(V).$$

Die Mengen $f|_{U_i}^{-1}(V)$ sind relativ offen in U_i . Da U_i offen ist, sind sie auch offen in X . Und da Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind, ist $f^{-1}(V)$ offen in X .

(b) Ist f stetig, so sind $f|_A$ und $f|_B$ stetig. Sei nun $W \subseteq Y$ offen. Wir erhalten

$$f^{-1}(W) = (f^{-1}(W) \cap A) \cup (f^{-1}(W) \cap B) = f|_A^{-1}(W) \cup f|_B^{-1}(W).$$

Nun ist $f|_A^{-1}(W)$ relativ abgeschlossen in A . Da A abgeschlossen ist, ist $f|_A^{-1}(W)$ abgeschlossen in X . Analog sehen wir, dass auch $f|_B^{-1}(W)$ in X abgeschlossen ist und folgern, dass $f^{-1}(W)$ in X abgeschlossen ist.

Aufgabe H3 (Eine Funktion, die nur in irrationalen Punkten stetig ist)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ sind teilerfremd} \end{cases}$$

in einem $x \in \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn x irrational ist. **Hinweis:** Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ und ein irrationales x die Menge

$$A = \left\{ y \in \mathbb{Q} \cap [x-1, x+1] : y = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ und } q \text{ teilerfremd und } \frac{1}{q} > \varepsilon \right\}$$

endlich ist. **Lösung:** Zunächst zeigen wir, dass f in jeder rationalen Zahl unstetig ist. Seien $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, teilerfremd. Wir setzen $x := \frac{p}{q}$. Für jedes $\delta > 0$ finden wir ein $y \in B_\delta(x)$, das irrational ist. Es gilt aber $|f(y) - f(x)| = \frac{1}{q}$.

Sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Angenommen wir können zeigen, dass die Menge A endlich ist. Sei $\delta := \min_{a \in A} |x - a|$. Für $y \in B_\delta(x)$ betrachten wir die folgende Fallunterscheidung.

1. Fall y ist irrational. Dann haben wir $0 = f(y) = f(x)$. Also erhalten wir $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

2. Fall y ist rational. Sei $y = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q . Aus $|x - y| < \delta$ erhalten wir $y \notin A$. Insbesondere sehen wir $\frac{1}{q} \leq \varepsilon$. Also erhalten wir $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Es bleibt zu zeigen, dass A endlich ist. Seien $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd und $\frac{p}{q} \in A$. Dann gilt $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$. q kann also nur endlich viele Werte annehmen. Zudem kann p nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, da $p < (x+1)q \leq \frac{x+1}{\varepsilon}$. Folglich muss A eine endliche Menge sein.