Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2013/2014
24.01.2013

13. Übungsblatt zur „Analysis I“

Hausübungen

Aufgabe H1 (Ein Homöomorphismus; 5 Punkte)

Man zeige, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ bijektiv ist und, dass sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Lösung: Die Abbildung f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen selber auch stetig.

Wir zeigen die Monotonie von f. Seien $0 \le x < y$. Aus $y - x > 0$ erhalten wir

$$0 < \frac{y + xy - x - xy}{(1+y)(1+x)} = \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+y)(1+x)} = \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+|y|} - \frac{x}{1+|x|}.$$

Der Fall $x < 0 < y$ ist trivial. Seien nun $x < y < 0$. Wir erhalten $(-x) > (-y) > 0$ und folgern $\frac{-x}{1+|x|} > \frac{-y}{1+|y|}$. Multiplikation mit -1 liefert die strenge Monotonie von f.

Nun folgern wir, dass f injektiv ist. Können wir zeigen, dass f auch surjektiv ist, so folgt mit dem Satz über die Umkehrfunktion die Stetigkeit von f^{-1} und wir sind fertig.

Sei $y \in]-1,1[$. Wir suchen ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{x}{1+|x|} = y$. D.h. wir suchen ein $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $y + y|x| - x = 0$. Es gilt $\lim_{x\to\infty} y + y|x| - x = \lim_{x\to\infty} y + yx - x = \lim_{x\to\infty} y + (y-1)x = -\infty$, da $y - 1 < 1$. Zudem gilt $\lim_{x\to-\infty} y + y|x| - x = \lim_{x\to\infty} y - yx - x = \lim_{x\to-\infty} y + (y+1)(-x) = \infty$, da $y + 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $y + y|x| - x = 0$. Es folgt die Surjektivität von f.

Aufgabe H2 (Eine weitere Gleichung; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$-12x^2 + (x-1)^3 + 51x^{17} = e^{-24x^9 - 29x^7}$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat. **Hinweis:** Betrachten Sie Grenzübergänge für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

Lösung: Die Nullstellen von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-24x^9-29x^7} - 51x^{17} + 12x^2 - (x-1)^3$ sind. Wir setzen $p(x) := -51x^{17} + 12x^2 - (x-1)^3$ und $q(x) := -24x^9 - 29x^7$. Es gilt $\lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} q(x) = -\infty$, sodass wir

$$\lim_{x\to\infty} e^{q(x)} + p(x) = -\infty$$

erhalten.

Zudem gilt $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} q(x) = \infty$, sodass wir

$$\lim_{x\to\infty} e^{q(x)} + p(x) = \infty$$

erhalten. Mit dem Zwischenwertsatz finden wir eine Nullstelle von f.

Aufgabe H3 (Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen; 5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\searrow p} f(x)$ und $\lim_{x\nearrow p} f(x)$ für jedes $p \in \mathbb{R}$ existieren und $\lim_{x\nearrow p} f(x) \leq f(p) \leq \lim_{x\searrow p} f(x)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte in denen f nicht stetig ist abzählbar ist. **Hinweis:** Man kann verwenden, dass $\lim_{x\nearrow p} f(x) \neq \lim_{x\searrow p} f(x)$ wenn f in $p \in]a, b[$ unstetig ist.

(c) Für $M \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung

$$1_M\colon \mathbb{N} \to \{0,1\},\ 1_M(n) := \begin{cases} 1 & : \text{ wenn } n \in M \\ 0 & : \text{ wenn } n \notin M. \end{cases}$$

Mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bezeichnen wir die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_M(n)}{10^n}$$

injektiv ist und folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Lösung:

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n < p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \to p$ für $n \to \infty$. Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen p konvergiert. Die Folge $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und durch $f(p)$ nach oben beschränkt. Es folgt, dass $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir schreiben $y := \lim_{n\to\infty}(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Offensichtlich gilt $y \leq f(p)$. Wir wollen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|y - f(x_{n_K})| < \varepsilon$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $x_n \geq x_{n_K}$ für alle $n \geq N$ gilt. Sei $n \geq N$. Wir wollen $|y - f(x_n)| < \varepsilon$ zeigen. Es gibt ein $L \in \mathbb{N}$, sodass $x_{n_L} \geq x_n$. Wir folgern

$$y \geq f(x_{n_L}) \geq f(x_n) \geq f(x_{n_K}).$$

Nun rechnen wir

$$|y - f(x_n)| = y - f(x_n) \leq y - f(x_{n_K}) = |y - f(x_{n_K})| < \varepsilon.$$

Wir erhalten also $\lim_{x\searrow p} f(x) = y \leq f(p)$. Analog sieht man, dass $\lim_{x\nearrow p} f(x)$ existiert und $f(p) \leq \lim_{x\nearrow p} f(x)$ gilt.

(b) Sei P die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Für $p \in P$ gilt $\lim_{x \nearrow p} f(x) \neq \lim_{x \searrow p} f(x)$. Hierbei ist zu beachten, dass die jeweiligen Grenzwerte existieren, da f monoton wachsend ist. Wir wählen ein rationales $q_p \in]\lim_{x \nearrow p} f(x), \lim_{x \searrow p} f(x)[$, das nach dem Archimedischen Prinzip existieren muss. Nun zeigen wir, dass die Abbildung $P \to \mathbb{Q}$, $p \mapsto q_p$ injektiv ist. Sein $p_1 < p_2 \in P$. Angenommen $q_{p_1} = q_{p_2}$, dann erhalten wir

$$q_{p_1} < \lim_{x \searrow p_1} f(x) \leq \lim_{x \nearrow p_2} < q_{p_2}.$$

Dies ist ein Widerspruch.

(c) Seien $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{M_1}(n)}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1_{M_2}(n)}{10^n}.$$

Da $1_{M_1}(n)$ und $1_{M_2}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ungleich 9 sind, erhalten wir aus der Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung $1_{M_1}(n) = 1_{M_2}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir folgern $M_1 = M_2$. Es folgt die Injektivität der betrachteten Abbildung. Wir wissen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist und können somit folgern, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.