1. Übungsblatt zu „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 1 (Topologische Mannigfaltigkeiten)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ und entscheiden Sie ohne Beweis, welche davon mit der induzierten Topologie topologische Mannigfaltigkeiten sind.

- (a) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$
- (b) $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$
- (c) $M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \in \mathbb{N}\}$
- (d) $M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - y = -1\}$
- (e) $M_5 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - y < -2\}$
- (f) $M_6 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in] - 2, - 1[\}$
- (g) $M_7 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-4, -3] \}$
- (h) $M_8 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -5 \text{ und } y \in \mathbb{Q}\}$

Lösungsvorschlag:

- (a) 1-dimensional Mannigfaltigkeit
- (b) keine Mannigfaltigkeit (es existiert keine Karte um $(0, 0)$)
- (c) 0-dimensionale Mannigfaltigkeit, da diskret
- (d) 1-dimensionale Mannigfaltigkeit
- (e) offene Teilmenge, also 2-dimensionale Mannigfaltigkeit
- (f) keine Mannigfaltigkeit (wegen $(0, -4)$)
- (g) keine Mannigfaltigkeit, da nicht lokal zusammenhängend

Aufgabe G 2 (Ein-Punkt-Kompaktifizierung)

Sei $X := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\infty \notin \mathbb{R}^n$. Wir definieren eine Menge von Teilmengen

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq \mathbb{R}^n : U \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n\} \cup \{X \setminus K : K \text{ ist kompakt in } \mathbb{R}^n\} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Hausdorff-Raum ist.
- (b) Zeigen Sie, dass diese Topologie auf $\mathbb{R}^n$ die gewöhnliche Topologie induziert.
- (c) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{O})$ kompakt ist.

Lösungsvorschlag: Anmerkung: Es gilt $\{X \setminus K : K \text{ ist kompakt in } \mathbb{R}^n\} = \{U \subseteq X : X \setminus U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist kompakt}\}$.

(a) Es gilt $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X \setminus X = \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Für endliche Schnitte haben wir folgende Fälle:

1. Fall: $V, U \in \mathcal{O}_1 \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}_1$.

2. Fall: $V, U \in \mathcal{O}_2 \Rightarrow X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ und da beide Mengen auf der rechten Seite kompakt sind, ist die Vereinigung auch kompakt und somit liegt $U \cap V$ in $\mathcal{O}_2$. 3. Fall: $U \in \mathcal{O}_1$ und $V \in \mathcal{O}_2$, also $X \setminus V = K$ kompakt. Dann gilt $U \cap V = U \cap (X \setminus K) = U \setminus K$ also offen in $\mathbb{R}^n$.

Nun betrachten wir beliebige Vereinigungen: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen aus $\mathcal{O}$.

1. Fall: $\infty \notin U_i$ für alle $i \in I$. Dann folgt sofort, dass die Vereinigung in $\mathcal{O}_1$ liegt.

2. Fall: Es gibt ein $j \in I$ mit $\infty \in U_j$. Wir erhalten

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus (U_i \cup \{\infty\})).$$

Die letzte Gleichheit gilt, da ∞ in mindestens einer Menge U_i enthalten ist. Nun sind aber alle Mengen auf der rechten Seite abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und mindestens eine der Mengen per Voraussetzung kompakt und somit ist der unendliche Schnitt ebenfalls kompakt.

Zeige $(X, \mathcal{O})$ ist hausdorffsch. Seien also $x \neq y \in X$.

1. Fall $x, y \in \mathbb{R}^d$. Dann existieren offensichtlich disjunkte Umgebungen von x und y , da $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch ist.

2. Fall $x = \infty$. Sei $K := \overline{B_2(x)}$ und $U := B_1(x)$. Dann ist $V := X \setminus K$ eine Umgebung von y die offensichtlich disjunkt zu der Umgebung U von x ist.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Es folgt $U \in \mathcal{O}_1$. Sei nun U offen bezüglich der Spurtopologie. Dann existiert ein $V \in \mathcal{O}$ mit $U = V \cap \mathbb{R}^n$. Daraus folgt $U \in \mathcal{O}_1$.

(c) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann existiert $j \in I$ mit $\infty \in U_j$. Es muss also nur noch $X \setminus U_j$ überdeckt werden und da diese Menge kompakt in $\mathbb{R}^n$ ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung aus Mengen U_i , da die Mengen $U_i \setminus \{\infty\}$ offen in $\mathbb{R}^n$ sind (denn $X \setminus U$ kompakt in $\mathbb{R}^n$ impliziert $(X \setminus \{\infty\}) \setminus (U \setminus \{\infty\})$ kompakt und diese beiden Mengen sind Teilmengen von $\mathbb{R}^n$).

Aufgabe G 3 (Karten)

Gegeben sei der topologische Raum $(X, \mathcal{O})$ aus G2.

(a) Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$F: X \rightarrow X, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \infty, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

(c) Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit?

Lösungsvorschlag: (a) Es gilt $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, d.h. es genügt Stetigkeit zu prüfen. Diese ist aber klar.

(b) Es gilt $F \circ F = \text{id}_X$, zeige also F stetig.

1. Fall: $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: Wähle eine Umgebung $U \in \mathcal{O}_1$ von x , dann gilt $F^{-1}(U) = f^{-1}(U)$. Mit (a) und G2(b) folgt die Offenheit des Urbildes in X .

2. Fall: $x = 0$. Wähle Umgebung $U := X \setminus \overline{B_N^{\mathbb{R}^n}(0)}$ von ∞ und setze $V := B_{\frac{1}{N}}^{\mathbb{R}^n}(0)$. Für $y \in V$ gilt $\|F(y)\| > N \Rightarrow F(y) \notin K$, also $F(y) \in X \setminus K = U$. Wir haben also $F(V) \subseteq U$ und somit $V \subseteq F(U) = F^{-1}(U)$ gezeigt.

3. Fall: $x = \infty$. Analog zum zweiten Fall mit der offenen 0-Umgebung $B_N^{\mathbb{R}^n}(0) := U$ und $V := X \setminus \overline{B_{\frac{1}{N}}^{\mathbb{R}^n}(0)}$.

(c) Nach G2(a) ist X hausdorffsch. Nach G2(b) hat jeder Punkt $x \in X \setminus \{\infty\}$ die Umgebung $\mathbb{R}^n$. Die Umgebung $X \setminus \{0\}$ von ∞ wird laut (b) homöomorph auf $X \setminus \{\infty\} = \mathbb{R}^n$ (ausgestattet mit der natürlichen Topologie nach G2(b)) abgebildet. Somit hat jeder Punkt eine Umgebung, die sich homöomorph in Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ abbilden lässt und da X hausdorffsch ist, ist X eine topologische Mannigfaltigkeit.