Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
10.11.2014

4. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 9 (Geometrischer Tangentialraum)

(a) Sei M eine l-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit ($k \geq 1$) des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für $x \in M$ die Abbildung

$$\theta\colon T_xM \to \mathbb{R}^n, \quad [\gamma] \mapsto \gamma'(0)$$

wohldefiniert ist (insbesondere existiert die Ableitung). Zeigen Sie weiter, dass $\theta\colon T_xM \to \operatorname{im}(\theta)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Wir nennen $\mathcal{T}_xM := \operatorname{im}(\theta)$ den geometrischen Tangentialraum an $x \in M$.

(b) Sei $M := \mathbb{S}^n$ die n-dimensionale Sphäre, aufgefasst als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass für den geometrischen Tangentialraum an der Stelle $x \in M$ gilt

$$\mathcal{T}_xM = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y \perp x\} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

(c) Zeichnen Sie $M := \mathbb{S}^1$ und skizzieren Sie $\mathcal{T}_xM$ (bzw. $x + \mathcal{T}_xM$) für einige Punkte $x \in M$.

Lösungsvorschlag: (a) Ein Weg $\gamma\colon]-\epsilon,\epsilon[\to M$ ist C^k genau dann, wenn er als Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ C^k ist. D.h. die Ableitung $\gamma'(0)$ existiert in $\mathbb{R}^n$. Sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, sodass $\varphi_M := \operatorname{pr}_l \circ \varphi|_M$ eine Untermannigfaltigkeitskarte um $\gamma(0) = x$ ist. Dann gilt

$$(\varphi_M \circ \gamma)'(0) = \Big((\operatorname{pr}_l \circ \varphi) \circ \gamma\Big)'(0) = (\operatorname{pr}_l \circ \varphi)'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0).$$

Da $(\operatorname{pr}_l \circ \varphi)'(\gamma(0))$ vollen Rang hat folgt daraus, dass für einen C^k Weg η mit $\eta(0) = x$ die Gleichheit $\eta'(0) = \gamma'(0)$ genau dann gilt, wenn $\eta \in [\gamma]$ ist und somit ist die Abbildung θ wohldefiniert und injektiv. Offensichtlich ist θ linear und somit folgt die Aussage.
(b) Sei $\gamma\colon]-\epsilon,\epsilon[\to \mathbb{R}^{n+1}$ ein glatter Weg mit Bild in M. Für alle $t \in]-\epsilon,\epsilon[$ gilt dann $\|\gamma(t)\| = 1$ und somit $1 = \|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle$. Ableiten nach t auf beiden Seiten liefert jetzt $0 = \langle \gamma(0), \gamma'(0)\rangle$. Es folgt $\mathcal{T}_xM \subseteq \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = 0\}$.
Die Sphäre M ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und somit hat der geometrische Tangentialraum $\mathcal{T}_xM$ nach (a) die Dimension n. Da der Untervektorraum $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y\rangle = 0\}$ ebenfalls die Dimension n hat (wegen $x \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$) folgt bereits die Gleichheit der Mengen.
(c) Die Menge $x + \mathcal{T}_xM$ entspricht genau der Tangente am Einheitskreis in x.

Aufgabe G 10 (Étale Abbildungen)

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

eine glatte étale Abbildung ist.

(b) Wir definieren $\Omega_j := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \colon v_j \neq 0\}$ für $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Zeigen Sie, dass

$$\Gamma_j \colon \Omega_j \to \Omega_j, \quad (v_1, \dots, v_{n+1}) \mapsto \left(\frac{v_1}{v_j}, \dots, \frac{v_{j-1}}{v_j}, v_j, \frac{v_{j+1}}{v_j}, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_j}\right)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist und dass

$$p_j \colon \Omega_j \to \mathbb{R}^n, \quad (w_1, \dots, w_{n+1}) \mapsto (w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_{n+1})$$

eine glatte Submersion ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^{n+1}), \quad v \mapsto \mathbb{R}v$$

eine glatte Submersion ist.
Hinweis: Schreiben Sie $\Phi|_{\Omega_j}$ als Verkettung von Diffeomorphismen und einer Submersion.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{S}^n \to P(\mathbb{R}^{n+1}), \quad v \mapsto \mathbb{R}v$$

eine surjektive glatte étale Abbildung ist.

Lösungsvorschlag: (a) Sei $x \in \mathbb{R}$, wir identifizieren $T_x\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ wie in der Vorlesung (konkret haben wir die Abbildung $r \mapsto [t \mapsto rt + x]$). Wenn wir $\mathbb{S}^1$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffassen, entspricht die Tangentialabbildung nach G9(a) der Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathcal{T}_{k(x)}\mathbb{S}^1, \quad r \mapsto r \cdot k'(x) = r(-\sin(x), \cos(x)).$$

Für jedes x ist $(-\sin(x), \cos(x))$ nicht 0 und da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^1$ (und somit auch $\mathcal{T}_x\mathbb{S}^1$) je 1-dimesnional sind, folgt, dass die Tangentialabbildung aus Dimensionsgründen bijektiv ist.

(b) Die Abbildung $\Gamma_j \colon \Omega_j \to \Omega_j$ ist offensichtlich glatt und hat die offensichtlich ebenfalls glatte Umkehrfunktion

$$\Gamma_j^{-1} \colon \Omega_j \to \Omega_j, \quad (v_1, \dots, v_{n+1}) \mapsto (v_1 v_j, \dots v_{j-1} v_j, v_j, v_{j+1} v_j, \dots, v_{n+1} v_j).$$

Die Abbildung p_j ist die Einschränkung der surjektiven linearen Abbildung

$$L\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \quad (w_1, \dots, w_{n+1}) \mapsto (w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_{n+1}).$$

Es gilt also für jedes $w \in \Omega_j$, dass $T_w p_j = L$ und somit ist p_j eine glatte Submersion.
(c) Die offenen Mengen Ω_j überdecken den Definitionsbereich $\mathbb{R}^{n+1}$ von Φ. Es genügt also für alle $1 \leq j \leq n+1$ zu zeigen, dass $\Phi|_{\Omega_j}$ eine glatte Submersion ist. Sei $1 \leq j \leq n+1$ und $v \in \Omega_j$ und sei $\psi_j \colon \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ eine Karte (bzw. ihr Inverses) von $P(\mathbb{R}^{n+1})$, wie in der Vorlesung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\psi_j \circ p_j \circ \Gamma_j(v) &= \psi_j \left(\frac{v_1}{v_j}, \dots, \frac{v_{j-1}}{v_j}, \frac{v_{j+1}}{v_j}, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_j} \right) \\
&= \mathbb{R} \left(\frac{v_1}{v_j}, \dots, \frac{v_{j-1}}{v_j}, 1, \frac{v_{j+1}}{v_j}, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_j} \right) \\
&= \mathbb{R}v = \Phi(v).
\end{aligned}$$

D.h. es gilt $\Phi|_{\Omega_j} = \psi_j \circ p_j \circ \Gamma_j$ und demnach ist $\Phi|_{\Omega_j}$ als Verknüpfung von Diffeomorphismen und einer glatten Submersion eine glatte Submersion.
(d) Wir definieren die surjektive Abbildung $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Die Abbildung f ist als Abbildung nach $\mathbb{R}^{n+1}$ glatt und somit glatt. Weiter ist Ψ als Einschränkung von Φ glatt und offensichtlich surjektiv. Da $\Phi = \Psi \circ f$ eine Submersion ist und f surjektiv ist, folgt aus der Kettenregel für die Tangentialabbildung, dass auch Ψ eine Submersion ist. Weil $\mathbb{S}^n$ und $P(\mathbb{R}^{n+1})$ je n-dimensional sind, ist somit Ψ automatisch étale.