

6. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 14 (Äquivalenzrelationen auf Mannigfaltigkeiten)

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation, die eine glatte Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist.

- (a) Zeigen Sie, dass die Vertauschung

$$f: R \rightarrow R, \quad (x, y) \mapsto (y, x)$$

ein Diffeomorphismus ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die Projektionen

$$\text{pr}_1: R \rightarrow M, \quad (x, y) \mapsto x \quad \text{und} \quad \text{pr}_2: R \rightarrow M, \quad (x, y) \mapsto y$$

glatt und surjektiv sind.

- (c) Zeigen Sie, dass pr_1 genau dann eine Submersion ist, wenn pr_2 eine Submersion ist.

Lösungsvorschlag: (a) Wir zeigen zunächst, dass auch $g: M \times M \rightarrow M \times M, \quad (x, y) \mapsto (y, x)$ glatt ist. Als Abbildung in die Produktmannigfaltigkeit ist g glatt, genau dann wenn die Komponenten glatt sind. Nun gilt aber $g_1 = \text{pr}_2^M$ und $g_2 = \text{pr}_1^M$ und die Projektionen eines Produktes von Mannigfaltigkeiten sind glatt.

Da R eine Äquivalenzrelation ist, ist folgt aus $(x, y) \in R$, dass auch $(y, x) \in R$ gilt und somit ist f wohldefiniert. Wir wissen, dass die Inklusion $i: R \rightarrow M \times M$ glatt ist und f genau dann glatt ist, wenn $i \circ f$ glatt ist. Nun gilt aber $i \circ f = g \circ i$ und da die rechte Seite als Verknüpfung glatter Funktionen ebenfalls glatt ist, folgt die Glattheit von f . Weiter ist f selbstinvers und somit ein Diffeomorphismus.

(b) Da für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$, sind die Projektionen surjektiv. Außerdem gilt $\text{pr}_1 = \text{pr}_1^M \circ i$ und $\text{pr}_2 = \text{pr}_2^M \circ i$, also sind die Projektionen als Verkettung von glatten Abbildungen glatt.

(c) Ist pr_1 eine Submersion, so auch $\text{pr}_2 = \text{pr}_1 \circ f$, da f ein Diffeomorphismus ist. Die andere Richtung geht analog.

Aufgabe G 15 (Quotientenmannigfaltigkeit)

Sei $M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen sie, dass die Menge $R := \{(x, y) \in M \times M: \|x\| = \|y\|\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist und, dass $\text{pr}_1: R \rightarrow M, \quad (x, y) \mapsto x$ eine surjektive Submersion ist.

Begründen Sie, dass M/R eine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt. Um welche Mannigfaltigkeit handelt es sich?

Lösungsvorschlag: Mit dem Satz von Godement: Da $q: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \|x\|$ offensichtlich eine glatte surjektive Submersion ist (da $q'(x) = \frac{x}{\|x\|} \neq 0$ gilt), folgt die erste Aussage sofort aus dem Satz von Godement. Weiter erhalten wir $M/R \cong \mathbb{R}_{>0}$.

Ohne den Satz von Godement: Wir definieren die offenen Teilmengen

$$\Omega_j := \{(x, y) \in M \times M : y_j > 0 \text{ und } \|x\|^2 - \|y\|^2 + y_j^2 > 0\}$$

und

$$\mathcal{O} := \{(x, y) \in M \times M : \|x\|^2 - \|y\|^2 + y_n^2 > 0\}$$

Man rechnet nach, dass

$$\varphi_j: M \times \Omega_j \rightarrow M \times \mathcal{O}, \quad (x, y) \mapsto (x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n, \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: M \times \mathcal{O} \rightarrow M \times \Omega_j, \quad (x, y) \mapsto (x, y_1, \dots, y_{j-1}, \sqrt{\|x\|^2 - \|y\|^2 + y_n^2}, y_j, \dots, y_{n-1}).$$

hat und φ eine Untermannigfaltigkeitskarte definiert. Für $y_j < 0$ geht man analog vor und erhält so einen Atlas für R .

Sei $(x, y) \in R$. Wegen $\|x\| = \|y\|$ existiert eine Matrix $A \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ mit $Ax = y$. Für jeden Tangentialvektor $[\gamma] \in T_x M$ gilt $[\gamma, \gamma] := [\gamma, A\gamma] \in T_{(x,y)} R$, da A den Betrag erhält. Man sieht sofort $T_{(x,y)} \text{pr}_1([\gamma, \gamma]) = [\gamma]$.

Aufgabe G 16 (Rangerhaltung)

Sei $m \geq n$ und S die Menge aller $n \times m$ -Matrizen A mit $x \mapsto Ax$ surjektiv. Zeigen Sie, dass S offen in $\mathbb{R}^{n \times m}$ ist und folgern Sie: Ist $f: M \rightarrow N$ eine C^k -Abbildung und $T_{x_0} f$ surjektiv, so hat x_0 eine offene Umgebung U in M derart, dass $T_x f$ für alle $x \in U$ surjektiv ist, somit ist $f|_U$ eine Submersion.

Lösungsvorschlag: Wir stellen zunächst fest, dass für die Inklusion $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Abbildung

$$i^*: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad A \mapsto A \circ i$$

stetig ist. Wenn A vollen Rang hat, können wir nach Basiswechsel annehmen, dass die lineare Abbildung $A' := A \circ i$ invertierbar ist. Da $\text{GL}_n(\mathbb{R}^n)$ offen ist finden wir eine Umgebung $U' \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{R}^n)$ um A' . Dann ist $(i^*)^{-1}(U')$ offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und alle linearen Abbildungen aus dieser Umgebung haben vollen Rang.

Sei φ eine Karte um x_0 und ψ eine Karte um $f(x_0)$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi: U_\varphi \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad x \mapsto h_\psi \circ T_x f \circ h_\varphi^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))$$

für U_φ klein genug wohldefiniert und stetig. Sei U' eine Umgebung von $h_\psi \circ T_{x_0} f \circ h_\varphi^{-1}$, sodass alle linearen Abbildungen aus U' vollen Rang haben. Wir erhalten die offene x_0 Umgebung $U := \Phi^{-1}(U')$, sodass $f|_U$ eine Submersion ist.