Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Wintersemester 2014/15
1.12.2014

7. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 17 (Tangentialbündel)

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und TM das Tangentialbündel. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$\sigma\colon M \to TM, \quad x \mapsto 0_x \in T_xM,$$

die jedem Punkt aus M den Nullvektor aus dem zugehörigen Tangentialraum zuordnet, eine glatte Immersion ist.

(b) Die kanonische Projektion $\pi\colon TM \to M$ ist eine glatte Submersion.

Lösungsvorschlag: Sei $x \in M$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um x. Dann ist $T\varphi$ eine Karte um $0_x \in \pi^{-1}(U)$.
(a) Es gilt $(\sigma \circ \varphi^{-1})(y) = 0_{\varphi^{-1}(y)}$ für $y \in V$ und somit

$$(T\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1})(y) = (\varphi^{-1}(y), 0).$$

Also ist σ glatt. Anwenden der Karte $(\varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ zeigt, dass in jedem Punkt Karten existieren so, dass σ in diesen Karten eine Inklusion ist. Somit ist σ eine Immersion.
(b) Für $(y, v) \in U \times \mathbb{R}^m$ gilt

$$\left(\varphi \circ \pi \circ (T\varphi)^{-1}\right)(y, v) = \varphi(y).$$

Also ist π glatt. Durch Verknüpfen mit $(\varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})^{-1}$ auf der rechte Seite, sehen wir außerdem, dass man für jeden Punkt Karten angeben kann, sodass π in diesen Karten eine Projektion ist. Also ist π eine Submersion.

Aufgabe G 18 (Tangentialbündel eines Produktes)

Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Konstruieren Sie einen Diffeomorphismus

$$\Phi\colon T(M \times N) \to TM \times TN,$$

sodass für alle $(x, y) \in M \times N$ die Einschränkung

$$\Phi|_{T_{(x,y)}(M\times N)}\colon T_{(x,y)}(M \times N) \to T_xM \times T_yN$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Lösungsvorschlag: Wir definieren

$$\Phi\colon T(M\times N)\to TM\times TN,\quad [\gamma]=[(\gamma_1,\gamma_2)]\mapsto([\gamma_1],[\gamma_2])=([\mathrm{pr}_M\circ\gamma],[\mathrm{pr}_N\circ\gamma]).$$

Sei $\varphi\colon U\to V\subseteq\mathbb{R}^m$ eine Karte um $x\in M$ und $\psi\colon U'\to V'\subseteq\mathbb{R}^n$ eine Karte um $y\in N$. Die Abbildung Φ ist wohldefiniert, da für zwei glatte Wege $\gamma,\eta\colon\,]-\epsilon,\epsilon[\to M\times N$ durch (x,y) die Gleichheit $((\varphi\times\psi)\circ\gamma)'(0)=((\varphi\times\psi)\circ\eta)'(0)$ genau dann gilt, wenn auch $(\varphi\circ\mathrm{pr}_M\circ\gamma)'(0)=(\varphi\circ\mathrm{pr}_M\circ\eta)'(0)$ und $(\psi\circ\mathrm{pr}_N\circ\gamma)'(0)=(\psi\circ\mathrm{pr}_N\circ\eta)'(0)$. Demnach ist auch die Abbildung

$$TM\times TN\to T(M\times N),([\gamma_1],[\gamma_2])\mapsto[(\gamma_1,\gamma_2)]$$

wohldefiniert und Φ somit bijektiv.
Per Definition gilt $\Phi=(T\mathrm{pr}_M,T\mathrm{pr}_N)$, d.h. für die Einschränkung gilt $\Phi|_{T_{(x,y)}(M\times N)}=(T_x\mathrm{pr}_M,T_y\mathrm{pr}_N)$, insbesondere ist sie linear. Da die Projektionen Submersionen sind und die Komponenten nicht voneinander abhängen, ist die Einschränkung aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus von Vektorräumen.
Wir zeigen mit den obigen Karten, dass Φ glatt ist. Wir haben

$$T(\varphi\times\psi)\colon\pi^{-1}_{M\times N}(U\times U')\to U\times U'\times R^{m+n},$$

$$[(\gamma_1,\gamma_2)]\mapsto(\gamma_1(0),\gamma_2(0),(\varphi\circ\gamma_1)'(0),(\psi\circ\gamma_2)'(0)).$$

Mit der Umkehrabbildung

$$(x,y,(v,w))\mapsto[t\mapsto(\varphi^{-1}(\varphi(x)+tv),\psi^{-1}(\psi(y)+tw))].$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$(T\varphi\times T\psi)\circ\Phi\circ T(\varphi\times\psi)^{-1}\colon U\times U'\times R^{m+n}\to(U\times R^m)\times(U'\times\mathbb{R}^n),$$

$$(x,y,(v,w))\mapsto((x,v),(y,w)).$$

Da Projektionen von Produkten von Mannigfaltigkeiten glatt sind, ist diese Abbildung glatt. Für die Umkehrabbildung zeigt eine analoge Rechnung Glattheit.

Aufgabe G 19 (Faserprodukte von Tangentialbündeln)

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\pi\colon TM\to M$ die kanonische Projektion. Sei weiter $TM\times_M TM$ das zugehörige Faserprodukt.

(a) Zeigen Sie, dass
$$TM\times_M TM=\bigcup_{x\in M}T_xM\times T_xM$$
gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Addition
$$\alpha\colon TM\times_M TM\to TM,\quad (v,w)\mapsto v+w$$
glatt ist.

Lösungsvorschlag: (a) Es gilt $(v, w) \in \bigcup_{x \in M} T_x M \times T_x M$ genau dann, wenn ein $x \in M$ existiert, sodass $(v, w) \in T_x M \times T_x M$. Dies gilt genau dann wenn, $\pi(v) = x = \pi(w)$ also genau dann, wenn $(v, w) \in TM \times_M TM$.
(b) Zunächst ist π nach G17(b) eine glatte Submersion und somit ist $TM \times_M TM \subseteq TM \times TM$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um $x \in M$. Da für $[\gamma_1, \gamma_2] \in TM \times_M TM$ gilt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, überdecken Karten vom Typ $T\varphi \times T\varphi$ die Untermannigfaltigkeit $TM \times_M TM$ und die Abbildung

$$(\varphi \circ \mathrm{pr}_1 - \varphi \circ \mathrm{pr}_2, \varphi \circ \mathrm{pr}_2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} \circ (\mathrm{pr}_3, \mathrm{pr}_4)) \circ T\varphi \times T\varphi|_{TM \times_M TM}$$

definiert eine Untermannigfaltigkeitskarte Φ. Mit dieser Karte erhalten wir

$$T\varphi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}\colon U \times \mathbb{R}^{2m} \to U \times \mathbb{R}^m, \quad (x, (v, w)) \mapsto (x, v + w),$$

was eine glatte Abbildung definiert.