

12. Übungsblatt zur „Grundlagen der Differentialgeometrie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 30 (Quotientengruppen)

Sei G eine Liegruppe, $H \subseteq G$ eine Unterliegruppe und $q: G \rightarrow G/H$ die Quotientenabbildung.

- (a) Sei $R := \{(x, y) \in G \times G: q(x) = q(y)\}$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie

$$R = \{(x, xy): x \in G, y \in H\}$$

und schließen Sie daraus $R \cong G \times H$. Insbesondere gilt also $\dim R = \dim G + \dim H$.

- (b) Begründen Sie die Gleichheit $\dim(\ker T_e q) + \dim G/H = \dim G$.

- (c) Zeigen Sie $\ker T_e q = T_e H$. *Hinweis:* Beachten Sie Schritt 6 aus dem Beweis des Satzes von Godement. Begründen Sie $\dim W = \dim N$ (in der Notation des Beweises).

Lösungsvorschlag: (a) Offensichtlich gilt $\{(x, xy): x \in G, y \in H\} \subseteq R$. Sei umgekehrt $(x, z) \in R$ dann folgt $z^{-1}x = h$ für ein $h \in H$ und somit $z = xh^{-1}$. Die Abbildung

$$R \rightarrow G \times H, \quad (x, xy) \mapsto (x, x^{-1}xy) = (x, y)$$

ist also wohldefiniert und glatt und $(x, y) \mapsto (x, xy)$ definiert eine ebenfalls glatte Umkehrabbildung.

- (b) Da q eine Submersion ist, gilt $\dim(\operatorname{Im} T_e q) = \dim T_e G/H = \dim G/H$. Wegen $\dim T_e G = \dim G$ folgt die Aussage nun aus der Dimensionsformel.

- (c) Aus Schritt 6 des Beweises folgt, dass $q(U) = q(W)$ für eine offene Umgebung $U \subseteq M$ gilt. Da q eine Submersion ist hat N also die gleiche Dimension wie $\operatorname{Im}(q)$ und da $q|_W$ ein Diffeomorphismus nach $q(W)$ ist also auch die gleiche Dimension wie W . Nun gilt $\dim W = \dim K = 2m - r$ wobei $r = \dim R$ und $m = \dim M$ (Anmerkung: $\dim W' = \dim W$ im Beweis). In unserer Situation folgt mit $M = G$, $N = G/H$ und $\dim R = \dim G + \dim H$ also $\dim G/H = \dim G - \dim H$. Wegen (b) muss also $\dim(\ker T_e q) = \dim H = \dim T_e H$ gelten. Aus der Vorlesung ist $T_e H \subseteq \ker T_e q$ bekannt und somit folgt Gleichheit.

Aufgabe G 31 (Komponenten der Tangentialabbildung)

Sei $f: M_1 \times M_2 \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Wir identifizieren

$$\Phi: T(M_1 \times M_2) \rightarrow TM_1 \times TM_2, \quad [(\gamma, \eta)] \mapsto ([\gamma], [\eta])$$

wie in G18. Zeigen Sie die Gleichheit

$$(Tf \circ \Phi^{-1})(v, w) = T(f(x, \bullet))(w) + T(f(\bullet, y))(v)$$

für alle $v \in T_x M_1$ und $w \in T_y M_2$.

Lösungsvorschlag: Sei $v = [\gamma]$ und $w = [\eta]$. Vorüberlegung: Sei $[c_y]$ der Konstante Weg durch $y \in M_2$ dann gilt $[c_y] = 0 \in T_y M_2$ und demnach $[\gamma, c_y] = (v, 0) \in T_{(x,y)} M_1 \times M_2$. Wir rechnen also

$$\begin{aligned} Tf \circ \Phi^{-1}([\gamma], [\eta]) &= Tf([\gamma, \eta]) = Tf(v, w) \\ &= Tf((v, 0) + (0, w)) = Tf(0, w) + Tf(v, 0) \\ &= Tf([c_x, \eta]) + Tf([\gamma, c_y]) = [t \mapsto f(x, \eta(t))] + [t \mapsto f(\gamma(t), y)] \\ &= T(f(x, \bullet))(w) + T(f(\bullet, y))(v). \end{aligned}$$

Aufgabe G 32 (Spezielle lineare Gruppe)

Die spezielle lineare Gruppe $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ ist als Untergruppe der $GL_n(\mathbb{R})$, die gleichzeitig eine Untermannigfaltigkeit ist, eine Liegruppe.

- (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$. *Hinweis:* Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur.
- (b) Folgern Sie, dass die Liealgebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := L(SL_n(\mathbb{R}))$ genau aus den Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\text{tr}(A) = 0$ besteht.

Lösungsvorschlag: (a) Angenommen A ist eine obere Dreiecksmatrix, etwa

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dann folgt

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & * & \dots & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

und somit $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$. Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Da alle Matrizen über $\mathbb{C}$ triagonalisierbar sind, existiert ein $S \in GL_n(\mathbb{C})$ und eine obere Dreiecksmatrix $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so, dass $X = SY S^{-1}$. Es ergibt sich

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(SY S^{-1})^k}{k!} = S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Y)^k}{k!} S^{-1}$$

und daraus folgt $\det e^X = \det e^Y = e^{\text{tr}(Y)}$. Da ähnliche Matrizen immer die gleiche Spur haben folgt die Aussage.

(b) Sei $\iota: \text{SL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ die Inklusion, dann gilt

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\iota} & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \exp_{\text{SL}_n(\mathbb{R})} \uparrow & & \uparrow \exp_{\text{GL}_n(\mathbb{R})} \\ L(\text{SL}_n(\mathbb{R})) & \xrightarrow{L(\iota)} & L(\text{GL}_n(\mathbb{R})) \end{array} ,$$

wobei $L(\iota): L(\text{SL}_n(\mathbb{R})) \rightarrow L(\text{GL}_n(\mathbb{R}))$ ebenfalls die Inklusion ist. Bekanntlich gilt

$$\exp_{\text{GL}_n(\mathbb{R})}: L(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto e^A.$$

D.h. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ besteht genau aus den Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $e^A \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$. Es muss also $1 = \det e^A = e^{\text{tr}(A)}$ gelten und somit $\text{tr}(A) = 0$. Gilt umgekehrt $\text{tr}(A) = 0$, so folgt mit dem gleichen Argument $e^A \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$