Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
20.10.2014

1. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Impressionen vom Oktoberfest)

Eine Maß Bier wird zur Zeit $t = 0$ frisch gezapft. Rührt man das Bier nicht an, so verringert sich das Volumen $V(t)$ des Bierschaums pro Zeit mit einer Rate, welche proportional zum momentan vorhandenen Schaumvolumen ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für V als Funktion der Zeit t auf. Lösen Sie die Differentialgleichung. Interpretieren Sie die Lösung und versuchen Sie, die Bedeutung der darin vorkommenden Konstanten zu verstehen.

Aufgabe G2 (Ein Richtungsfeld)

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = 2x.$$

Finden Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung und bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' &= 2x \\ y(1) &= 3. \end{cases}$$

Aufgabe G3 (Lokale Lipschitzbedingung)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto |x| \cdot y.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.
(b) Finden Sie eine Lösung $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' &= |x| \cdot y \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?
[Hinweis: Es ist $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x \cdot |x|) = |x|$.]

Hausübungen

Aufgabe H1 (Verfaulende Vegetation; 3 Punkte)

Es sei $m(t)$ die Masse (in kg) der abgestorbenen Vegetation, die sich zur Zeit t auf einem gegebenen Quadratmeter eines tropischen Waldes befindet. Durch Fäulnis nimmt die Masse mit einer Rate proportional zu $m(t)$ ab. Zusätzlich kommt aber neuer "Abfall" hinzu, mit einer konstanten Rate.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für m auf.
(b) Finden Sie druch "Trennung der Variablen" eine Lösung m der Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $m(0) = m_0$. Hierbei ist m_0 die Ausgangsmasse und $\alpha < 0$ Ihre oben gewählte Proportionalitätskonstante.
(c) Ist die Lösung in (b) eindeutig?
(d) Wie verhält sich Ihre Lösung für $t \to \infty$? Hängt die Antwort von m_0 ab?

Aufgabe H2 (Lutschen eines Bonbons; 3 Punkte)

Das Volumen $V(t)$ eines kugelförmigen Bonbons (vom Volumen V_0 beim Beginn des Lutschens zur Zeit $t = 0$) verringert sich beim Lutschen mit einer zeitlichen Rate, welche proportional zur vorhandenen Oberfläche ist.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für V als Funktion der Zeit auf.
(b) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung.
(c) Interpretieren Sie Ihre Lösung: Verschwindet das Bonbon nach einer gewissen Zeit? Können Sie die in der Lösung auftauchenden Konstanten durch Größen ersetzen, die für den Genießer des Bonbons direkt erfahrbar sind (wie z.B. V_0)? Kann Ihre Lösung für große t der Realität entsprechen? Wie sollte die Lösung sich dort verhalten? Gibt es eine Lösung der Differentialgleichung, die mit den Erfahrungen der Realität in Einklang steht?

Aufgabe H3 (Eine Substitution; 3 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall und $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ genau dann die Differentialgleichung $y' = g(\frac{y}{x})$ löst, wenn $\psi(x) := \frac{\phi(x)}{x}$ die Differentialgleichung $z' = \frac{1}{x}(g(z) - z)$ löst.

Anwendung: Lösen Sie $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ mit $y(1) = 1$.

Modalitäten: Bitte geben Sie ihre Lösungen zu den Übungszetteln in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.

Zur Vorlesung Reelle Analysis wird es eine Klausur geben. Wenn Sie die Klausur **bestehen** und mehr als 50% der Punkte in den Übungsaufgaben erreicht haben, erhalten Sie einen Bonus von einem Notenschritt (z.B. von 4,0 auf 3,7). Der Bonus hilft also nicht beim Bestehen der Klausur. Sollten Sie über 80% der Punkte aus den Übungsaufgaben erreicht haben, so bekommen Sie einen weiteren Notenschritt (also z.B. von 4,0 auf 3,3).

Im Falle von mündlichen Prüfungen (Master Lehramt) wird kein Bonus auf die Note angewendet.