Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2014/15
08.12.2014

8. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G22 (Erste Beispiele von Integralen)

In dieser Aufgabe sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1[}\, d\lambda\,; \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\, d\lambda\,; \quad \int_{\mathbb{R}} (1+\cos(x))\, d\lambda(x)\,; \quad \int_{[\frac{1}{2},3[} [x]\, d\lambda(x)\,.$$

(b) Entscheiden Sie, ob das Integral im Sinne von Definition 3.9 definiert ist und berechnen Sie es in diesem Fall. Ist der Integrand eine integrierbare Funktion?

$$\int_{[-1,2[} [x]\, d\lambda(x)\,; \qquad \int_{\mathbb{R}} \cos(x)\, d\lambda(x)\,; \qquad \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{[0,\infty[} - \mathbf{1}_{[-2,-1]})\, d\lambda\,.$$

Aufgabe G23 (Konvergenzsätze)

Warum existieren die Limites und was ist ihr Wert?

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)}\, d\lambda(x)\,; \qquad \text{(b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} x^n\, d\lambda(x)\,.$$

Aufgabe G24 (Approximation von Integralen)

Seien $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to [0,\infty]$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\mu(A) < \infty$ gibt, sodass

$$\int_X f\, d\mu - \int_B f\, d\mu < \varepsilon$$

für jedes $B \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq B$.

Hausübungen

Aufgabe H22 (Konvergenzsätze; 3 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx\sin(x)}{n^3x^2+1}\, d\lambda(x)\,; \qquad \text{(b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n e^{-x}\, d\lambda(x)\,.$$

Aufgabe H23 (Stufenfunktionen; 3 Punkte)

Wir betrachten die nicht-negativen messbaren Funktionen $f_1, f_2 \colon [0,1] \to [0,\infty[$,

$$f_1(x) \;:=\; x\,; \qquad f_2(x) := 1 - x\,.$$

Da $f_1 + f_2 = 1$, ist dann $s\colon [0,1] \to [0,\infty[$, $s(x) := 1$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $s \leq f_1 + f_2$.

Zeigen Sie, dass es keine nicht-negativen Stufenfunktionen $s_1, s_2 : [0,1] \to [0,\infty[$ gibt derart, dass $s_1 \leq f_1$, $s_2 \leq f_2$ und $s_1 + s_2 = s$.

Aufgabe H24 (Verschiedenes; 3 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{S})$ ein Messraum.

(a) Zeigen Sie: Sind f und g messbare Funktionen $(X,\mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so ist $\{x \in X\colon f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{S}$. Hinweis: Betrachten Sie $f - g$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass auch für messbare Funktionen $f, g\colon (X,\mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ die Menge $A := \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}$ messbar ist. Folgern Sie, dass $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$.

Hinweis: Es ist $A = f^{-1}(\{\infty\}) \cup g^{-1}(\{-\infty\}) \cup \{x \in E : f(x) \geq g(x)\}$ mit $E := f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent ist, wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(d) (Messbarkeit der Menge der Konvergenzstellen). Schließen Sie aus (b) und (c): Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : (X,\mathcal{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, so ist $\{x \in X\colon f_n(x) \text{ konvergiert in } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{S}$.

(e) Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $f_*(\mathcal{S}) := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{S})$ das direkte Bild. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $g\colon Y \to Z$ in einen Messraum $(Z, \mathcal{T})$ genau dann bzgl. $f_*(\mathcal{S})$ messbar ist, wenn $g \circ f\colon (X,\mathcal{S}) \to (Z,\mathcal{T})$ messbar ist.