Prof. Dr. Helge Glöckner Wintersemester 2014/15
15.12.2014

9. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G25 (Bildmaße)

Es sei $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T})$ eine messbare Abbildung zwischen Messräumen und μ ein Maß auf $(X, \mathcal{S})$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f_*(\mu)\colon \mathcal{T} \to [0, \infty]\,,\ \ f_*(\mu)(A) \;:=\; \mu(f^{-1}(A))$

ist ein Maß auf $(Y, \mathcal{T})$ (genannt das “Bildmaß von μ unter f.”)

(b) Ist auch $(Z, \mathcal{U})$ ein Messraum und $g\colon (Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{U})$ messbar, so ist

$$(g \circ f)_*(\mu) \;=\; g_*\big(f_*(\mu)\big)\,.$$

Aufgabe G26 (Konvergenz fast überall)

Es sei $q\colon \mathbb{N} \to \,]0,1[\, \cap \mathbb{Q},\ n \mapsto q_n$ eine Bijektion. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

für λ-fast alle $x \in \,]0,1[$ gegen eine reelle Zahl konvergiert (hier $1/0 := \infty$).

Hinweis: In $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert die Reihe für alle x. Ist $\displaystyle\int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{|x - q_n|}}\, d\tilde{\lambda}(x) \;<\; \infty$? Nutzt das?

Aufgabe G27 (Riemann-Integrale als Lebesgue-Integrale)

Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_{[0,1]} f\, d\tilde{\lambda}$, in dem Sie es auf ein geeignetes Riemann-Integral zurückführen:

(a) $f(x) \;:=\; x^2$ (b) $f(x) \;:=\; \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ x^2 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Hausübungen

Aufgabe H25 (Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel-Maßes; 3 Punkte)

Es sei λ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Wir wollen sehen, dass

$$\lambda(x+A) \;=\; \lambda(A) \qquad \text{für jede Borelmenge } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n);$$

hierbei ist $x + A := \{x + a \colon a \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty[$, $\mu(A) := \lambda(x + A)$ ein Maß ist.

(b) Berechnen Sie $\mu([a,b[)$ für halboffene Quader $[a,b[$, wobei $a = (a_1,\dots,a_n)$, $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_k < b_k$.

(c) Schließen Sie aus der Eindeutigkeit des Lebesgue-Borel Maßes, dass $\mu = \lambda$.

Aufgabe H26 (Translationsinvariante Maße auf $\mathbb{R}$; 3 Punkte)

(a) Es sei $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty[$ ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mu([0,1[) < \infty$. Zeigen Sie, dass μ ein Vielfaches des Lebesgue-Borel-Maßes ist:

$$\mu \;=\; c\cdot\lambda \qquad \text{mit } c := \mu([0,1[)\,.$$

Anleitung: Drücken Sie $\mu([0,\frac{1}{2}[)$ und $\mu([\frac{1}{2},1[)$ duch $c := \mu([0,1[)$ aus. Was ist $\mu([x,x+\frac{1}{2}[)$ für $x \in \mathbb{R}$? Was ist $\mu([x,x+2^{-m}[)$? Was ist $\mu([a,b[)$ für $a < b$?

(b) Zeigen Sie, dass das Zählmaß $\zeta\colon (\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R})) \to [0,\infty]$ ein translationsinvariantes Maß ist, aber kein Vielfaches des Lebesgue-Borel-Maßes. Warum widerspricht dies nicht Aufgabenteil (a) ?

Aufgabe H27 (Vervollständigung von Maßräumen; 3 Punkte)

Ist $(X,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum, so sei $\tilde{\mathcal{S}}$ die Menge aller Teilmengen $A \subseteq X$ der Gestalt $A = B \cup N$, wobei $B \in \mathcal{S}$ und $N \subseteq X$ eine μ-Nullmenge ist (siehe **4.6** im Skript).

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathcal{S}}$ eine σ-Algebra auf X ist, mit $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$.

(b) Ist $A \in \tilde{\mathcal{S}}$, so existiert ein $B \in \mathcal{S}$ und eine μ-Nullmenge $N \subseteq X$ mit $A = B \cup N$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\mu}(A) \;:=\; \mu(B) \tag{1}$$

unabhängig von der Wahl von B und N ist, also eine Abbildung $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{S}} \to [0,\infty]$ durch (1) wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}$ ein Maß ist und $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq X$ genau dann eine μ-Nullmenge ist, wenn N eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge ist.