

11. Übungsblatt zur „Reelle Analysis“

Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Cavalierisches Prinzip)

Es seien $a, b > 0$ und $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$.

- (a) Skizzieren Sie M für $a = 1, b = 2$.
- (b) Bestimmen Sie $M_y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.
- (c) Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen $\lambda_2(M)$ von M .

Aufgabe G32 (Berechnung einiger Volumina)

- (a) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ des Ellipsoids $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\}$, wobei $a, b, c > 0$.
- (b) Berechnen Sie mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Körpers $M := K \cap Z$, der durch Schneiden der Kugel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und des Zylinders $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ entsteht.

Aufgabe G33 (Eine Lebesgue-, aber nicht Riemann-integrierbare Funktion)

Es sei $q: \mathbb{N} \rightarrow Q := \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ eine Bijektion. Gegeben $\varepsilon \in]0, 1[$ wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein offenes Intervall $U_n \subseteq]0, 1[$ derart, dass $q_n \in U_n$ und U_n höchstens die Länge $\varepsilon/2^n$ hat. Dann ist

$$Q \subseteq U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq]0, 1[\quad \text{und} \quad \lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $f := \mathbf{1}_U : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. λ über $[0, 1]$ integrierbar ist, mit $\int_{[0,1]} f d\lambda \leq \varepsilon$.
- (b) Berechnen Sie das Oberintegral $\int_0^1 f(x) dx$ und schließen Sie, dass f nicht über $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist [Welchen Wert hätte sonst das Riemann-Integral?]
- (c) Zeigen Sie, dass $U \setminus N$ in $]0, 1[$ dicht ist, für jede λ -Nullmenge $N \subseteq]0, 1[$.
- (d) Nun sei $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(x) = f(x)$ λ -fast überall. Zeigen Sie, dass auch g nicht über $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist.

Die Lebesgue-integrierbare Funktion f lässt sich also nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer Riemann-integrierbaren Funktion machen.

Hausübungen

Aufgabe H31 (Cavalierisches Prinzip; 3 Punkte)

Es sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } (x \leq 0 \text{ oder } |y| \leq x)\}$.

Skizzieren Sie die Menge M und berechnen Sie ihren Flächeninhalt $\lambda_2(M)$ mit dem Prinzip von Cavalieri.

Aufgabe H32 (Volumenberechnung mit Zylinderkoordinaten; 3 Punkte)

Skizzieren Sie grob die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\}$$

und berechnen Sie ihr Volumen unter Benutzung von Zylinderkoordinaten.

Hinweis: Zu Zylinderkoordinaten siehe Skript, Kapitel 8!

Aufgabe H33 (Durchdringungskörper zweier Zylinder; 3 Punkte)

Wir betrachten die Zylinder

$$Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{und}$$

$$Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$$

sowie ihre Schnittmenge $M := Z_1 \cap Z_2$.

(a) Versuchen Sie eine grobe Skizze von M .

(b) Bestimmen Sie für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Menge

$${}_{(x,y)}M := \{z \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in M\}.$$

(c) Berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(M)$ von M .